종합 모의고사 — 풀이판

수리통계 자격시험 모의고사 A · B · C

시험지판과 같은 문제에 완전한 풀이, 소문항별 채점 기준, 관련 회차와 정리를 붙였다. 시험지판으로 시간을 재고 푼 뒤에 이 판으로 채점한다. 맨 뒤의 표는 각 문항이 어느 회차의 어떤 도구를 쓰는지 보여 준다.

세트	문항	배점	시간
모의고사 A	A1–A6	100점	180분
모의고사 B	B1–B6	100점	180분
모의고사 C	C1–C6	100점	180분

수치 정규분포·t·χ^2·F의 분위수처럼 필요한 수치는 문제에 준다. 계산기는 쓰지 않는다

답안 증명은 등호와 부등호마다 근거를 단다. 근거가 없는 단계는 채점 기준에서 감점한다

채점 풀이판의 채점 기준으로 채점한다. 최종답이 수나 식인 소문항은 노트북 `17_mock_qual.ipynb`의 `check("A3b", …)`로도 확인한다

응시 요령

1. **세트 하나를 한 번에 푼다.** 180분을 재고, 중간에 노트를 펴지 않는다. 문항 머리의 배점과 권장 시간을 보고 시간을 나눈다.
2. **모든 문항을 푼다.** 선택 문항은 없다. 막힌 소문항은 앞 소문항의 결과를 가정하고 다음으로 넘어가도 된다. 그때는 무엇을 가정했는지 적는다.
3. **가정을 확인한다.** 극한과 적분의 교환, 정칙 조건, 표본 크기에 대한 조건처럼 정리를 쓰기 위한 조건을 답안에 적는다. 채점 기준에 그 배점이 있다.
4. **채점은 다음 날 한다.** 풀이판의 채점 기준으로 소문항마다 점수를 매기고, 틀린 곳의 **관련** 회차로 돌아가 해당 정리의 단계형 증명과 워크북 B부를 다시 푼다.

A

모의고사 A

시간은 180분이고 6문항, 100점이다. 강의노트, 워크북, 증명 도구 상자를 덮고 푼다. 분위수처럼 계산에 필요한 수치는 문제에 주어져 있다. 증명에는 단계마다 근거를 단다.

A1 기록값의 수

15점 · 25분

$X_1, X_2, \dots$ 가 연속분포를 따르는 iid 확률변수이다. X_1은 기록값이고, $k \ge 2$이면 $X_k > \max(X_1, \dots, X_{k-1})$일 때 X_k를 기록값이라 한다. I_k를 X_k가 기록값이라는 사건의 지시함수, $R_n = I_1 + \cdots + I_n$을 처음 n개 가운데 기록값의 수라 하자. $(X_1, \dots, X_k)$의 $k!$가지 크기 순서가 모두 같은 확률이라는 사실은 증명 없이 써도 된다.

(a) (4점) $P(I_k = 1) = 1/k$임을 보여라. $j < k$이면 $P(I_j = 1, I_k = 1) = 1/(jk)$임을 보이고, I_j와 I_k가 독립임을 결론지어라.

(b) (4점) $ER_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\operatorname{Var} R_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)$임을 보여라.

(c) (3점) $n = 10$이다. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \approx 2.929$, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2} \approx 1.550$을 써서 $P(R_{10} \ge 6)$의 Markov 상한과 Chebyshev 상한을 구하라.

(d) (4점) $0 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \le 1$을 써서 $R_n / \log n$이 1로 확률수렴함을 보여라.

풀이 (a) $I_k = 1$은 $(X_1, \dots, X_k)$ 가운데 가장 큰 것이 X_k라는 사건이다. $k!$가지 순서 가운데 X_k가 맨 위인 것은 나머지 $k-1$개의 순서 $(k-1)!$가지이므로 $P(I_k = 1) = (k-1)!/k! = 1/k$이다. $j < k$이면 $I_j = I_k = 1$은 "X_k가 처음 k개 가운데 가장 크고, X_j가 처음 j개 가운데 가장 크다"는 사건이다. X_k를 맨 위에 두면 $X_1, \dots, X_{k-1}$의 순서는 $(k-1)!$가지이고, 그 가운데 X_j가 처음 j개 가운데 가장 큰 것은 대칭으로 $1/j$의 비율, 곧 $(k-1)!/j$가지다. 따라서

$$P(I_j = 1, I_k = 1) = \frac{(k-1)!/j}{k!} = \frac{1}{jk} = P(I_j = 1)\,P(I_k = 1)$$

이다. 지시함수 둘은 "둘 다 1"의 확률이 곱으로 갈라지면 독립이다(1회 정리 5.8로 나머지 세 칸도 곱이 된다).

(b) 선형성으로 $ER_n = \sum_k P(I_k = 1) = \sum_k 1/k$이다. $\operatorname{Var} I_k = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$이고, (a)로 $j \ne k$이면 $\operatorname{Cov}(I_j, I_k) = \frac{1}{jk} - \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{k} = 0$이다. 합의 분산은 분산의 합에 공분산의 두 배를 더한 것이고(3회 정리 4.2), 공분산이 모두 0이므로 $\operatorname{Var} R_n = \sum_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)$이다.

(c) $ER_{10} \approx 2.929$, $\operatorname{Var} R_{10} \approx 2.929 - 1.550 = 1.379$이다. Markov: $P(R_{10} \ge 6) \le ER_{10}/6 \approx 0.488$. Chebyshev: $R_{10} \ge 6$이면 $|R_{10} - ER_{10}| \ge 6 - 2.929 = 3.071$이므로

$$P(R_{10} \ge 6) \le \frac{\operatorname{Var} R_{10}}{3.071^2} = \frac{1.379}{9.431} \approx 0.146.$$

분산의 정보를 쓰는 Chebyshev 쪽이 세 배 넘게 좁다. 정확한 값은 약 0.020이다(첫째 종류 Stirling 수로 계산한다).

(d) $h_n = \sum_{k \le n} 1/k$로 두면 $E(R_n/\log n) = h_n/\log n \to 1$이고, (b)로 $\operatorname{Var} R_n \le h_n$이므로 $\operatorname{Var}(R_n/\log n) \le h_n/(\log n)^2 \le (\log n + 1)/(\log n)^2 \to 0$이다. $\varepsilon > 0$에 대해 n이 크면 $|h_n/\log n - 1| \le 1/\log n < \varepsilon/2$이므로 Chebyshev로

$$P\Big(\Big|\frac{R_n}{\log n} - 1\Big| > \varepsilon\Big) \le P\Big(\Big|\frac{R_n - h_n}{\log n}\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) \le \frac{4h_n}{\varepsilon^2 (\log n)^2} \to 0$$

이다. 기록값은 n개 가운데 $\log n$개 정도뿐이다. $n = 10^6$이어도 평균 14.4개다.

채점 기준 (a) 4점: $1/k$의 세기 2점, $1/(jk)$의 세기 1점, 독립의 결론 1점. 대칭만 말하고 순서를 세지 않으면 1점 감점. (b) 4점: 평균 1점, 공분산이 0임 2점, 분산 1점. 독립을 쓰지 않고 분산을 더하면 2점 감점. (c) 3점: Markov 1점, Chebyshev 2점(편차 3.071을 쓰는 단계 포함). (d) 4점: 평균과 분산의 극한 2점, Chebyshev와 $\varepsilon/2$로 나누는 단계 2점.

관련 1회 정리 5.8(여사건과의 독립), 2회 정리 1.10(선형성)·정리 5.1(Markov)·정리 5.3(Chebyshev), 3회 정리 4.2(공분산의 계산 규칙), 15회 보조정리 1.3(순위는 균등한 순열)

최종답 (a) $P(I_j = I_k = 1) = \frac{1}{jk}$ (c) Chebyshev 상한 ≈ 0.146

A2 지수분포의 비에 대한 조건부 분포

15점 · 25분

X와 Y가 독립이고 둘 다 밀도 e^{-x} $(x > 0)$를 갖는다. $U = X/Y$, $V = Y$로 둔다.

(a) (4점) (U, V)의 결합밀도를 구하고, U의 밀도가 $f_U(u) = (1+u)^{-2}$ $(u > 0)$임을 보여라. $EU = \infty$임을 보여라.

(b) (4점) $U = u$일 때 V의 조건부 분포를 구하고, $E(X \mid U = u)$를 구하라.

(c) (3점) $W = U/(1+U)$가 $\mathrm{U}(0,1)$을 따름을 보여라.

(d) (4점) $\operatorname{Var}(X \mid U)$를 W로 쓰고, 전분산 공식으로 $\operatorname{Var} X = 1$을 다시 얻어라. $E[\operatorname{Var}(X \mid U)]$는 얼마인가?

풀이 (a) $x = uv$, $y = v$이므로 Jacobian은 $|\partial(x,y)/\partial(u,v)| = \left|\det\left(\begin{smallmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right| = v$이다. 3회 정리 5.1로

$$f_{U,V}(u,v) = e^{-uv} e^{-v} \cdot v = v\, e^{-(1+u)v}, \qquad u > 0,\ v > 0.$$

v로 적분하면 $\int_0^\infty v\, e^{-(1+u)v}\, dv = (1+u)^{-2}$이다(감마 적분, 4회 정리 3.5). $EU = \int_0^\infty u(1+u)^{-2} du$는 $u \to \infty$에서 피적분함수가 $1/u$처럼 줄어 발산한다.

(b) $f(v\mid u)=f_{U,V}(u,v)/f_U(u)=(1+u)^2 v\,e^{-(1+u)v}$이므로 $U=u$일 때 $V\sim\Gamma(2,\ \text{율}\ 1+u)$이고 $E(V\mid U=u)=2/(1+u)$이다. $X=UV$이므로 $E(X\mid U=u)=u\,E(V\mid U=u)=\dfrac{2u}{1+u}$이다. $EU=\infty$인데도 이 조건부 기댓값은 2보다 작다.

(c) $w=u/(1+u)$는 $(0,\infty)$에서 $(0,1)$로 가는 증가함수이고 $u=w/(1-w)$, $du/dw=(1-w)^{-2}$이다. $1+u=1/(1-w)$이므로 $f_W(w)=(1-w)^2\cdot(1-w)^{-2}=1$ $(0<w<1)$이다. $W=X/(X+Y)$이므로 4회 정리 4.2(베타–감마)의 특수한 경우이기도 하다.

(d) $\operatorname{Var}(V\mid U=u)=2/(1+u)^2$이므로 $\operatorname{Var}(X\mid U=u)=u^2\cdot 2/(1+u)^2=2w^2$, 곧 $\operatorname{Var}(X\mid U)=2W^2$이고 $E(X\mid U)=2W$이다. 3회 정리 2.6으로

$$\operatorname{Var}X=E[2W^2]+\operatorname{Var}(2W)=2\cdot\tfrac{1}{3}+4\cdot\tfrac{1}{12}=\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}=1$$

이다. $E[\operatorname{Var}(X\mid U)]=\frac{2}{3}$이다. X의 흩어짐의 $\frac{2}{3}$은 비 U를 알아도 남고, $\frac{1}{3}$은 U로 설명된다.

채점 기준 (a) 4점: Jacobian과 결합밀도 2점, 주변밀도 1점, $EU=\infty$ 1점. 지지집합을 적지 않으면 1점 감점. (b) 4점: 조건부 분포 2점, $X=UV$로 조건부 기댓값 2점. (c) 3점: 변환과 미분 2점, 결론 1점. (d) 4점: 조건부 분산 2점, 전분산 계산 2점.

관련 3회 정리 5.1(Jacobian 변수변환)·정의 2.2(조건부 밀도)·정리 2.6(전분산 공식), 4회 정리 3.5(감마함수)·정리 4.2(베타와 감마)

최종답 (a) $f_U(u)=(1+u)^{-2}$ (b) $\dfrac{2u}{1+u}$ (d) $E[\operatorname{Var}(X\mid U)]=\dfrac{2}{3}$

A3 생존확률의 두 추정량

15점 · 25분

$X_1,\dots,X_n$이 밀도 $\theta^{-1}e^{-x/\theta}$ $(x>0)$인 iid 표본이다. $t>0$을 고정하고 $\psi=P(X_1>t)=e^{-t/\theta}$를 추정한다. 두 추정량

$$\hat\psi_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}\{X_i>t\},\qquad \hat\psi_2=\exp(-t/\bar X_n)$$

을 비교한다.

(a) (3점) $\sqrt{n}(\hat\psi_1-\psi)$의 극한분포를 구하라.

(b) (4점) $\sqrt{n}(\hat\psi_2-\psi)$의 극한분포를 구하라. 근사분산 $v_2(t,\theta)$를 적어라.

(c) (4점) $x=t/\theta$로 두고 두 근사분산의 비 v_2/v_1을 x의 식으로 쓴 뒤, 모든 $x>0$에서 1보다 작음을 보여라. $t=\theta$일 때 그 비는 얼마인가? ($e\approx 2.718$)

(d) (4점) 실제 자료가 U(0, 2)에서 나왔고 $t=1$이다. 두 추정량은 각각 무엇으로 확률수렴하는가? 이 결과와 (c)에서 추정량을 고르는 기준을 한 문장으로 적어라.

풀이 (a) $\mathbf{1}\{X_i>t\}$는 성공률 ψ의 iid Bernoulli이므로 CLT(7회 정리 3.1)로 $\sqrt{n}(\hat\psi_1-\psi)\to\mathcal{N}(0,\psi(1-\psi))$이다.

(b) $EX_1=\theta$, $\operatorname{Var}X_1=\theta^2$이므로 $\sqrt{n}(\bar X_n-\theta)\to\mathcal{N}(0,\theta^2)$이다. $g(m)=e^{-t/m}$는 $m>0$에서 미분가능하고 $g'(\theta)=\frac{t}{\theta^2}e^{-t/\theta}\neq 0$이므로 델타 방법(7회 정리 4.4)으로

$$\sqrt{n}(\hat\psi_2-\psi)\to\mathcal{N}\big(0,\ g'(\theta)^2\theta^2\big),\qquad v_2=\left(\frac{t}{\theta}\right)^2 e^{-2t/\theta}.$$

(c) $v_1=\psi(1-\psi)=e^{-x}(1-e^{-x})$, $v_2=x^2e^{-2x}$이므로 $v_2/v_1=\dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}=\dfrac{x^2}{e^x-1}$이다. $h(x)=e^x-1-x^2$로 두면 $h(0)=0$이고 $h'(x)=e^x-2x>0$이다(e^x-2x의 최솟값은 $x=\log 2$에서 $2-2\log 2>0$). 따라서 $x>0$에서 $h(x)>0$, 곧 $v_2/v_1<1$이다. $t=\theta$이면 $1/(e-1)\approx 0.582$이다. 모형이 맞으면 $\hat\psi_2$로 같은 정밀도를 얻는 데 표본이 약 58%만 필요하다.

(d) $\hat\psi_1\to P(X>1)=\frac12$이다(대수의 법칙). $\bar X_n\to EX=1$이고 $m\mapsto e^{-1/m}$은 $m=1$에서 연속이므로 연속사상 정리(7회 정리 1.3)로 $\hat\psi_2\to e^{-1}\approx 0.368$이다. $\hat\psi_2$는 참값 $\frac12$이 아닌 곳으로 간다. 모형이 맞을 때의 효율(c)과 모형이 틀릴 때의 일치성(d)을 맞바꾸는 선택이다. 자료가 지수분포를 따른다는 근거가 약하면 $\hat\psi_1$이 안전하다.

채점 기준 (a) 3점: Bernoulli 평균임 1점, 분산 $\psi(1-\psi)$ 2점. (b) 4점: $\bar X$의 CLT 1점, g' 계산 2점, 델타 방법의 조건($g'(\theta)\neq 0$) 1점. (c) 4점: 비의 식 2점, 부등식의 증명 1점, 수치 1점. 부등식을 그림이나 몇 점의 값으로만 주장하면 1점 감점. (d) 4점: 두 극한 각 1점, 연속사상 정리를 밝힘 1점, 효율–일치성의 맞바꿈 1점.

관련 7회 정리 1.3(연속사상)·정리 1.6(Khinchin)·정리 3.1(CLT)·정리 4.4(델타 방법), 15회 2절(효율의 비교)

최종답 (b) $v_2=(t/\theta)^2e^{-2t/\theta}$ (c) $\dfrac{1}{e-1}\approx 0.582$ (d) $\hat\psi_2\to e^{-1}\approx 0.368$

A4 Pareto 분포: 추정과 검정 20점 · 40분

$X_1, \dots, X_n$이 밀도

$$f(x;\theta) = \theta\, x^{-(\theta+1)}, \qquad x > 1,\ \theta > 0$$

인 iid 표본이다. $T = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$로 둔다.

(a) (4점) θ의 MLE를 구하고, 그것이 가능도의 유일한 최댓점임을 보여라.

(b) (4점) Fisher 정보 $I(\theta)$를 구하고 MLE의 극한분포를 적어라. 정칙 조건 가운데 이 분포족에서 확인해야 할 것을 하나 들어 확인하라.

(c) (5점) $Y_i = \log X_i$의 분포를 구하라. T가 완비충분통계량임을 보이고 θ의 UMVUE를 구하라. 그 분산을 Cramér–Rao 한계와 비교하라.

(d) (4점) $H_0 : \theta \le \theta_0$ 대 $H_1 : \theta > \theta_0$의 크기 α UMP 검정을 구하고, 기각역의 경계를 χ^2 분위수로 적어라.

(e) (3점) $n = 10$, $\theta_0 = 2$, $\alpha = 0.05$이다. $\chi^2(20)$의 하위 5% 분위수는 10.851이다. 기각역의 경계를 수로 구하라. 관측값이 $T = 2.5$이면 결론은? ($P(\chi^2(20) \le 10) \approx 0.032$)

풀이 (a) 로그가능도는 $\ell(\theta) = n\log\theta - (\theta+1)T$이다. $\ell'(\theta) = n/\theta - T$이고 $T > 0$(모든 $x_i > 1$)이므로 ℓ'은 $\theta < n/T$에서 양수, $\theta > n/T$에서 음수다. 따라서 $\hat\theta = n/T$가 유일한 최댓점이다. $\ell''(\theta) = -n/\theta^2 < 0$으로 오목성으로도 확인된다.

(b) $\partial_\theta \log f = 1/\theta - \log x$, $-\partial_\theta^2 \log f = 1/\theta^2$이므로 $I(\theta) = 1/\theta^2$이다(9회 정리 2.2의 둘째 표현). 9회 정리 3.1로 $\sqrt{n}(\hat\theta - \theta) \to \mathcal{N}(0, \theta^2)$이다. 확인할 조건: 지지집합 $\{x > 1\}$이 θ에 의존하지 않는다. (덧붙여 $\log f$는 θ에 대해 무한 번 미분가능하고, 셋째 도함수 $2/\theta^3$은 θ 근방에서 유계다.) 균등분포 U$(0,\theta)$와 달리 이 조건이 성립하므로 $\sqrt{n}$ 정규근사가 맞다.

(c) $P(Y > y) = P(X > e^y) = e^{-\theta y}$이므로 $Y_i \sim$ Exp(율 θ)이고 $T \sim \Gamma(n,$ 율 $\theta)$이다. $f(x;\theta) = \theta\exp(-\theta\log x)\,x^{-1}$은 자연모수 $-\theta$가 열린 구간 $(-\infty, 0)$을 채우는 지수족이므로 T는 완비충분통계량이다(11회 정리 4.5). $E(1/T) = \theta/(n-1)$ $(n \ge 2)$이므로 $(n-1)/T$는 θ의 불편추정량이고, T의 함수이므로 Lehmann–Scheffé(11회 정리 3.3)로 UMVUE다. $E(1/T^2) = \theta^2/((n-1)(n-2))$이므로 $n \ge 3$에서

$$\operatorname{Var}\!\left(\frac{n-1}{T}\right) = \frac{(n-1)^2\theta^2}{(n-1)(n-2)} - \theta^2 = \frac{\theta^2}{n-2} > \frac{\theta^2}{n} = \frac{1}{nI(\theta)}.$$

UMVUE도 Cramér–Rao 한계(9회 정리 2.4)에 닿지 않는다. 한계에 닿는 것은 T/n으로 추정하는 $1/\theta$뿐이다(11회 정리 4.6).

(d) $\theta_1 > \theta_0$이면 가능도비 $\prod f(x_i;\theta_1)/\prod f(x_i;\theta_0) = (\theta_1/\theta_0)^n e^{-(\theta_1-\theta_0)T}$은 T의 감소함수, 곧 $-T$의 증가함수다. 단조가능도비를 가지므로 Karlin–Rubin(12회 정리 2.4)으로 "$T < c$이면 기각"이 UMP다. $2\theta T \sim \chi^2(2n)$이므로 $P_{\theta_0}(T < c) = \alpha$에서 $c = \chi^2_{2n,\alpha}/(2\theta_0)$이다($\chi^2_{2n,\alpha}$는 하위 α 분위수). T가 연속이므로 확률화가 필요 없다.

(e) $c = 10.851/4 \approx 2.713$이다. $T = 2.5 < 2.713$이므로 H_0을 기각한다. 유의확률은 $P_{\theta_0}(T \le 2.5) = P(\chi^2(20) \le 4 \cdot 2.5) \approx 0.032$이다.

채점 기준 (a) 4점: 로그가능도 1점, 점수방정식 1점, 유일한 최댓점의 논증 2점(경계와 부호 변화 또는 오목성). (b) 4점: 정보 2점, 극한분포 1점, 조건 확인 1점. (c) 5점: Y의 분포 1점, 완비충분 1점, 불편성과 Lehmann–Scheffé 2점, 분산 비교 1점. MLE를 UMVUE라 하면 2점 감점. (d) 4점: 단조가능도비의 방향 2점, χ^2 변환으로 경계 2점. 기각 방향을 $T > c$로 쓰면 3점 감점. (e) 3점: 경계 1점, 결론 1점, 유의확률 1점.

관련 9회 정리 2.2(정보의 두 표현)·정리 2.4(Cramér–Rao)·정리 3.1(점근정규성), 11회 정리 3.3(Lehmann–Scheffé)·정리 4.5(지수족의 완비충분통계량)·정리 4.6(한계에 닿는 모형), 12회 정의 2.2·정리 2.4(Karlin–Rubin), 4회 정리 3.7(감마의 적률)

최종답 (a) $\hat\theta = n/T$ (b) $\sqrt{n}(\hat\theta - \theta) \to \mathcal{N}(0, \theta^2)$ (c) $(n-1)/T$ (e) $c \approx 2.713$

A5 직교 다항식 회귀

20점 · 40분

$x = -2, -1, 0, 1, 2$에서 반응을 하나씩 관측해 $y = (5,\ 2,\ 1,\ 3,\ 9)$를 얻었다. 모형은 $z_i = x_i^2 - 2$로 두고

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

이다. $t_{2,0.975} = 4.303$, $F_{1,2;0.95} = 18.51$, $\sqrt{0.02} \approx 0.1414$를 써도 된다.

(a) (4점) 설계행렬 X를 쓰고 $X'X$가 대각행렬임을 보여라. 최소제곱추정값 $\hat\beta$를 구하라.

(b) (4점) 잔차제곱합과 s^2을 구하라. $\hat\beta$와 s^2의 분포, 그리고 둘의 관계를 적어라.

(c) (4점) $\tilde\beta_1 = (y_5 - y_1)/4$가 β_1의 선형불편추정량임을 보이고, $\operatorname{Var}\hat\beta_1 / \operatorname{Var}\tilde\beta_1$을 구하라. 이 비가 1보다 작다는 것은 어느 정리의 한 예인가?

(d) (5점) 이차항이 필요한지 $H_0 : \beta_2 = 0$을 수준 0.05에서 F 검정으로 검정하라. F 통계량의 값을 적어라.

(e) (3점) β_1의 95% 신뢰구간을 구하라.

풀이 (a) X의 세 열은 $\mathbf{1} = (1,1,1,1,1)$, $x = (-2,-1,0,1,2)$, $z = (2,-1,-2,-1,2)$이다. $\mathbf{1}'x = 0$, $\mathbf{1}'z = 0$, $x'z = -4+1+0-1+4 = 0$이므로 $X'X = \operatorname{diag}(5, 10, 14)$이다. 정규방정식(13회 정리 2.2)이 성분마다 갈라져

$$\hat\beta_0 = \frac{\sum y_i}{5} = 4, \qquad \hat\beta_1 = \frac{\sum x_i y_i}{10} = \frac{9}{10}, \qquad \hat\beta_2 = \frac{\sum z_i y_i}{14} = \frac{21}{14} = 1.5$$

이다.

(b) 적합값은 $(5.2,\ 1.6,\ 1.0,\ 3.4,\ 8.8)$, 잔차는 $(-0.2,\ 0.4,\ 0,\ -0.4,\ 0.2)$이므로 잔차제곱합은 0.4이고 $s^2 = 0.4/(5-3) = 0.2$이다. 13회 정리 4.7로 $\hat\beta \sim \mathcal{N}_3(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$, $2s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(2)$이고 $\hat\beta$와 s^2은 독립이다. $(X'X)^{-1}$이 대각이므로 $\hat\beta_0, \hat\beta_1, \hat\beta_2$도 서로 독립이다.

(c) $E\tilde\beta_1 = \frac14[(\beta_0+2\beta_1+2\beta_2)-(\beta_0-2\beta_1+2\beta_2)] = \beta_1$이다($z_1=z_5=2$). $\operatorname{Var}\tilde\beta_1 = 2\sigma^2/16 = \sigma^2/8$, $\operatorname{Var}\hat\beta_1 = \sigma^2/10$이므로 비는 $\frac{8}{10} = \frac45$이다. Gauss–Markov 정리(13회 정리 3.3)의 한 예다. 선형불편추정량 가운데 $\hat\beta_1$의 분산이 가장 작다.

(d) 일반선형가설(13회 정리 4.9)에서 $C=(0,0,1)$, $q=1$이므로

$$F = \frac{\hat\beta_2^2/[(X'X)^{-1}]_{33}}{s^2} = \frac{1.5^2\cdot 14}{0.2} = 157.5$$

이고 H_0에서 $F\sim F(1,2)$이다. $157.5 > 18.51$이므로 H_0을 기각한다. $t=\hat\beta_2/(s/\sqrt{14}) \approx 12.55$이고 $t^2=F$이다. 제한모형의 잔차제곱합 $0.4+31.5=31.9$로 $(31.9-0.4)/0.2=157.5$를 얻어도 같다.

(e) $\hat\beta_1 \pm t_{2,0.975}\,s/\sqrt{10} = 0.9 \pm 4.303\sqrt{0.02} \approx 0.9\pm 0.608$, 곧 $[0.29,\ 1.51]$이다. 자유도가 2뿐이어서 t 분위수가 정규의 1.96보다 두 배 넘게 크다.

채점 기준 (a) 4점: 설계행렬 1점, 직교성 1점, $\hat\beta$ 2점. (b) 4점: 잔차제곱합과 s^2 2점(자유도 $n-p=2$로 나누지 않으면 1점 감점), 분포와 독립 2점. (c) 4점: 불편성 1점, 분산의 비 2점, Gauss–Markov 1점. (d) 5점: 통계량 3점, 기준과 결론 2점. (e) 3점: 공식 2점, 수치 1점.

관련 13회 정리 2.2(정규방정식) · 정리 3.3(Gauss–Markov) · 정리 4.7(정규선형모형의 표본분포) · 따름정리 4.8(t, 신뢰구간) · 정리 4.9(일반선형가설)

최종답 (b) $s^2=0.2$ (c) $\frac45$ (d) $F=157.5$ (e) 0.9 ± 0.608

A6 척도 손실에서의 Bayes 추정과 minimax

15점 · 25분

$X_1,\dots,X_n$ $(n\ge 3)$이 밀도 $\lambda e^{-\lambda x}$ $(x>0)$인 iid 표본이고 $T=\sum X_i$이다. 사전분포는 $\lambda\sim \Gamma(\alpha,\ \text{율 }\beta)$, 곧 밀도가 $\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}$에 비례한다. 손실은 상대오차의 제곱 $L(\lambda,d)=(d/\lambda-1)^2$이다. 답의 식에서 α,β는 `alpha`, `beta`로 쓴다.

(a) (3점) λ의 사후분포를 구하라.

(b) (4점) 이 손실에서 Bayes 추정량을 구하고, 그때의 사후 기대손실이 $1/(\alpha+n-1)$임을 보여라.

(c) (5점) $c>0$에 대해 $d_c=c/T$의 위험 $R(\lambda,d_c)$를 구하라. 위험이 λ에 의존하지 않음을 보이고, MLE의 위험을 구하라. MLE는 허용적인가?

(d) (3점) $d_{n-2}=(n-2)/T$가 minimax임을 보이고, 그 위험을 구하라.

풀이 (a) 사후밀도는 $\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}\cdot\lambda^n e^{-\lambda T}\propto \lambda^{\alpha+n-1}e^{-(\beta+T)\lambda}$이므로 $\Gamma(\alpha+n,\ \text{율 }\beta+T)$이다(16회 정리 1.2).

(b) $E[(d/\lambda-1)^2\mid \mathbf{x}] = d^2E[\lambda^{-2}\mid\mathbf{x}] - 2dE[\lambda^{-1}\mid\mathbf{x}]+1$은 d의 이차식이므로 $d^*=E[\lambda^{-1}\mid\mathbf{x}]/E[\lambda^{-2}\mid\mathbf{x}]$에서 최소다. $a=\alpha+n$, $b=\beta+T$로 두면 $E[\lambda^{-1}\mid\mathbf{x}]=b/(a-1)$,

$E[\lambda^{-2}\mid \mathbf{x}] = b^2/((a-1)(a-2))$ $(a>2)$이므로

$$d^* = \frac{a-2}{b} = \frac{\alpha+n-2}{\beta+T}, \qquad \min_d E[L\mid \mathbf{x}] = 1 - \frac{(E[\lambda^{-1}\mid \mathbf{x}])^2}{E[\lambda^{-2}\mid \mathbf{x}]} = 1 - \frac{a-2}{a-1} = \frac{1}{\alpha+n-1}$$

이다. 최소 사후 기대손실은 자료에 의존하지 않는다.

(c) $T\sim\Gamma(n,\ \text{율 }\lambda)$이므로 $E(1/T)=\lambda/(n-1)$, $E(1/T^2)=\lambda^2/((n-1)(n-2))$이다. 따라서

$$R(\lambda,d_c) = E\Big(\frac{c}{\lambda T}-1\Big)^2 = \frac{c^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{2c}{n-1} + 1$$

이고 λ가 없다. MLE는 $\hat\lambda = n/T$이므로 $c=n$을 넣으면 $R=\dfrac{n+2}{(n-1)(n-2)}$이다. 위험은 c의 이차식이고 $c=n-2$에서 최소 $1/(n-1)$이다. $\dfrac{n+2}{(n-1)(n-2)} - \dfrac{1}{n-1} = \dfrac{4}{(n-1)(n-2)} > 0$이므로 d_{n-2}가 모든 λ에서 MLE보다 위험이 작다. MLE는 허용적이지 않다. $n=10$이면 위험은 $\frac{1}{6}$ 대 $\frac{1}{9}$이다.

(d) 임의의 추정량 δ와 사전분포 $\pi_{\alpha,\beta}$에 대해 위험의 최댓값은 Bayes 위험보다 작지 않고, Bayes 위험은 Bayes 추정량에서 가장 작다. (b)로 Bayes 추정량의 사후 기대손실은 상수 $1/(\alpha+n-1)$이므로 그 Bayes 위험도 $1/(\alpha+n-1)$이다. 따라서

$$\sup_\lambda R(\lambda,\delta) \ \ge\ r(\pi_{\alpha,\beta},\delta) \ \ge\ \frac{1}{\alpha+n-1} \qquad (\alpha>0)$$

이고 $\alpha\downarrow 0$으로 보내면 $\sup_\lambda R(\lambda,\delta)\ge 1/(n-1)=\sup_\lambda R(\lambda,d_{n-2})$이다. 그러므로 d_{n-2}는 minimax이고 위험은 $1/(n-1)$이다. d_{n-2}는 어떤 정칙 사전분포의 Bayes 추정량도 아니다($\alpha=\beta=0$의 극한이다). 그래서 16회 정리 2.3(b)를 바로 쓰지 않고 극한으로 논증했다.

채점 기준 (a) 3점: 결레 계산 2점, 모수 1점. (b) 4점: 이차식의 최소화 2점, 역적률 계산 1점, 사후 기대손실 1점. (c) 5점: T의 역적률 2점, 위험의 식 1점, MLE의 위험 1점, 지배하는 추정량과 비허용성 1점. (d) 3점: sup $\ge$ Bayes 위험의 부등식 1점, 극한 논증 2점. 상수 위험만 말하고 극한 논증이 없으면 1점만 준다.

관련 16회 정리 1.2(결레 사전분포)·정리 2.1(Bayes 추정량)·정리 2.3(Bayes 추정량의 두 성질), 4회 정리 3.7(감마의 적률), 16회 워크북 C3(Bayes 위험의 극한과 minimax)

최종답 (b) $\frac{\alpha+n-2}{\beta+T}$ (c) $\frac{n+2}{(n-1)(n-2)}$ (d) $\frac{1}{n-1}$

B

모의고사 B

시간 180분, 6문항, 100점. 강의노트, 워크북, 증명 도구 상자를 덮고 푼다. 필요한 수치(분위수, 로그값 등)는 문제에 있고 계산기는 쓰지 않는다. 노트북의 `check()`에 식을 넣을 때는 λ를 `lam`, μ를 `mu`, ρ를 `rho`로 쓴다.

B1 두 Poisson 과정과 Chernoff 한계 15점 · 25분

두 종류의 사건 A와 B가 서로 독립인 Poisson 과정으로 일어난다. A의 비율은 λ, B의 비율은 μ다.

(a) (4점) A가 처음 일어나기 전에 B가 일어난 횟수를 N이라 하자. $P(N=k)$ $(k=0,1,\dots)$를 구하고, N이 어떤 분포인지 밝혀라.

(b) (4점) $X\sim\mathrm{Poi}(\lambda)$의 적률생성함수를 구하고, $a>\lambda$이면 $P(X\ge a)\le e^{-\lambda}(e\lambda/a)^a$ 임을 보여라.

(c) (4점) $\lambda=2$, $a=6$에서 (b)의 한계, Markov 부등식의 한계, Chebyshev 부등식으로 얻는 한계를 구해 비교하라. $e^4\approx 54.6$이다.

(d) (3점) (b)로 $P(X\ge 2\lambda)\le (e/4)^{\lambda}$ 임을 보이고, $\lambda\to\infty$에서 Chebyshev 부등식이 주는 한계와 줄어드는 빠르기를 비교하라.

풀이 (a) A의 첫 사건 시각 T는 $\mathrm{Exp}(\lambda)$이다(4회 정리 3.2). B 과정은 A 과정과 독립이므로, $T=t$가 주어지면 N은 길이 t인 구간에서 B가 일어난 횟수이고 $\mathrm{Poi}(\mu t)$를 따른다. 반복기댓값(3회 정리 2.5)으로

$$P(N=k)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!}\,dt \qquad T\text{로 조건을 건다}$$

$$=\frac{\lambda\mu^k}{k!}\cdot\frac{\Gamma(k+1)}{(\lambda+\mu)^{k+1}}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\Big)^k. \qquad \text{감마적분, 4회 정리 3.5}$$

N은 성공확률 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$인 기하분포(0부터 센다)다. 합친 과정의 사건 하나하나가 서로 독립으로 확률 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$로 A라는 것과 같은 내용이다.

(b) $M(t)=\sum_k e^{tk}e^{-\lambda}\lambda^k/k!=\exp\{\lambda(e^t-1)\}$이다(4회 정리 2.2). 일반화된 Markov 부등식(2회 따름정리 5.2)을 $t>0$에서 쓰면 $P(X\ge a)\le e^{-ta}M(t)=\exp\{g(t)\}$, $g(t)=\lambda(e^t-1)-ta$이다. $g'(t)=\lambda e^t-a=0$에서 $t^*=\log(a/\lambda)$이고, $a>\lambda$이므로 $t^*>0$이다. $g''>0$이므로 최소이고

$$g(t^*)=a-\lambda-a\log\frac{a}{\lambda},\qquad P(X\ge a)\le e^{-\lambda}\Big(\frac{e\lambda}{a}\Big)^a.$$

(c) Chernoff 한계는 $e^{-2}(2e/6)^6 = e^4/3^6 = 54.6/729 \approx 0.0749$이다. Markov 한계는 $EX/a = \frac{1}{3}$이다. Chebyshev 한계는 $P(X \ge 6) \le P(|X-2| \ge 4) \le \mathrm{Var}\,X/16 = \frac{1}{8}$이다. 정확한 값은 $1 - e^{-2}\left(1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}\right) = 0.0166$이므로 Chernoff 한계는 4.5배, Chebyshev는 7.5배, Markov는 20배 크다.

(d) $a = 2\lambda > \lambda$를 넣으면 $e^{-\lambda}(e/2)^{2\lambda} = e^{-\lambda}e^{2\lambda}/4^{\lambda} = (e/4)^{\lambda}$이다. $e/4 \approx 0.68 < 1$이므로 이 한계는 λ에 대해 지수적으로 준다. Chebyshev로는 $P(X \ge 2\lambda) \le P(|X-\lambda| \ge \lambda) \le \lambda/\lambda^2 = 1/\lambda$로 $1/\lambda$의 속도로만 준다.

채점 기준 (a) 4점: T의 분포와 조건부 Poisson 2점, 감마적분 1점, 기하분포 식별 1점. 독립을 쓰는 곳을 밝히지 않으면 1점 감점. (b) 4점: mgf 1점, $t > 0$에서의 일반화된 Markov 1점, 최적 t와 $a > \lambda$의 역할 2점. (c) 4점: 세 한계 각 1점, 비교 1점. (d) 3점: 식 1점, Chebyshev의 $1/\lambda$ 1점, 지수 대 다항 감소의 비교 1점.

관련 2회 정의 3.1, 정리 5.1, 따름정리 5.2, 정리 5.3 · 3회 정리 2.5 · 4회 정리 2.2, 정리 3.2, 정리 3.5

최종답 (a) $P(N=k) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k$ (c) $\frac{e^4}{729} \approx 0.0749$ (d) $(e/4)^{\lambda}$

B2 무게가 다른 정규 관측의 t 구간

15점 · 25분

$X_1, \dots, X_n$이 독립이고 $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/w_i)$이다. 무게 $w_i > 0$는 알려져 있고 μ와 σ^2은 모른다. $W = \sum_i w_i$, $\hat{\mu} = \sum_i w_i X_i / W$, $S_w^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i w_i(X_i - \hat{\mu})^2$으로 둔다.

(a) (4점) $Z_i = \sqrt{w_i}(X_i - \mu)/\sigma$, $\mathbf{a} = (\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_n})'/\sqrt{W}$로 두면 $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, I)$, $\mathbf{a}'\mathbf{Z} = \sqrt{W}(\hat{\mu} - \mu)/\sigma$, $(n-1)S_w^2/\sigma^2 = \mathbf{Z}'(I - \mathbf{a}\mathbf{a}')\mathbf{Z}$임을 보여라.

(b) (4점) $\hat{\mu}$와 S_w^2이 독립이고 $(n-1)S_w^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$임을 보여라.

(c) (4점) $T = \sqrt{W}(\hat{\mu} - \mu)/S_w \sim t(n-1)$임을 보이고 μ의 $1-\alpha$ 신뢰구간을 써라.

(d) (3점) $n = 4$, 무게 $(1, 1, 2, 4)$, 관측값 $(6, 12, 11, 14)$에서 95% 구간을 $\hat{\mu} \pm h$ 꼴로 구하라. $t(3)$의 0.975 분위수는 3.182이다.

풀이 (a) Z_i는 서로 독립인 $\mathcal{N}(0,1)$이므로 $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, I)$이다. $\mathbf{a}'\mathbf{a} = \sum_i w_i/W = 1$이고 $\mathbf{a}'\mathbf{Z} = \sum_i w_i(X_i - \mu)/(\sigma\sqrt{W}) = \sqrt{W}(\hat{\mu} - \mu)/\sigma$이다. $\sum_i w_i(X_i - \hat{\mu}) = 0$이므로 교차항이 사라져

$$\sum_i w_i(X_i - \mu)^2 = \sum_i w_i(X_i - \hat{\mu})^2 + W(\hat{\mu} - \mu)^2 \qquad \text{더하고 빼기 [T4]}$$

이고, σ^2으로 나누면 $\mathbf{Z}'\mathbf{Z} = (n-1)S_w^2/\sigma^2 + (\mathbf{a}'\mathbf{Z})^2$, 곧 $(n-1)S_w^2/\sigma^2 = \mathbf{Z}'\mathbf{Z} - (\mathbf{a}'\mathbf{Z})^2 = \mathbf{Z}'(I - \mathbf{a}\mathbf{a}')\mathbf{Z}$이다.

(b) 첫 행이 $\mathbf{a}'$인 직교행렬 Q를 잡는다($\mathbf{a}$를 정규직교기저로 늘린다. 6회 보조정리 2.1의 Helmert 행렬과 같은 구성). $\mathbf{U} = Q\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, QQ') = \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, I)$이다(5회 정리 3.8). $U_1 = \mathbf{a}'\mathbf{Z}$이고 $\mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \mathbf{U}'\mathbf{U}$이므로 $(n-1)S_w^2/\sigma^2 = U_2^2 + \cdots + U_n^2$이다. 공분산이 단위행렬이므로 $U_1, \dots, U_n$은 상호 독립이다(5회 정리 3.11, 따름정리 3.12). 따라서 $\hat{\mu}$(U_1의 함수)와

$S_w^2(U_2,\dots,U_n$의 함수)은 독립이고, 표준정규 $n-1$개의 제곱합은 $\chi^2(n-1)$이다(4회 정리 3.9).

(c) $T=\dfrac{U_1}{\sqrt{(U_2^2+\cdots+U_n^2)/(n-1)}}$이고 분자와 분모가 독립이므로 $t(n-1)$이다(6회 정의 3.1). σ가 지워져 T는 축량이다(6회 정의 5.1). 구간은 $\hat\mu \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\,S_w/\sqrt{W}$이다. $w_i\equiv 1$이면 6회 정리 5.2의 t-구간이다.

(d) $W=8$, $\hat\mu=(6+12+22+56)/8=12$이다. $\sum_i w_i(x_i-12)^2=36+0+2+16=54$이므로 $S_w^2=18$, $S_w/\sqrt{W}=\sqrt{18/8}=1.5$이다. $h=3.182\times 1.5=4.773$이고 구간은 $[7.227,\ 16.773]$이다. 무게를 무시한 보통의 t-구간은 중심 10.75, 반폭 5.41로, 정밀한 넷째 관측을 덜 반영하고 분산 구조도 맞지 않는다.

채점 기준 (a) 4점: $\mathbf{Z}$의 분포 1점, $\mathbf{a}$가 단위벡터이고 $\mathbf{a}'\mathbf{Z}$의 식 1점, 제곱합 분해(교차항이 0인 이유 포함) 2점. (b) 4점: 직교행렬 1점, $\mathbf{U}\sim\mathcal{N}_n(\mathbf{0},I)$ 1점, 독립 1점, χ^2 1점. Craig나 Cochran의 정리(13회)로 보여도 만점. (c) 4점: t의 정의에 맞추기 2점, 축량 1점, 구간 1점. (d) 3점: $\hat\mu$ 1점, S_w 1점, h와 구간 1점.

관련 4회 정리 3.9 · 5회 정리 3.8, 정리 3.11, 따름정리 3.12 · 6회 보조정리 2.1, 정리 2.2, 정의 3.1, 정의 5.1, 정리 5.2

최종답 (d) $\hat\mu=12,\ h=4.773$

B3 분포에 무관한 분위수 구간과 허용구간

15점 · 25분

$X_1,\dots,X_n$이 iid이고 분포함수 F는 연속이라는 것 말고는 모른다. $0<p<1$에서 $F(\xi_p)=p$인 점 ξ_p가 하나뿐이라고 하자.

(a) (4점) $r<s$이면 $P\big(X_{(r)}\le\xi_p<X_{(s)}\big)=\sum_{k=r}^{s-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$이고, 따라서 이 확률이 F에 의존하지 않음을 보여라.

(b) (3점) $n=10$, $p=0.75$에서 구간 $[X_{(5)},\ X_{(10)})$이 상사분위수 $\xi_{0.75}$를 포함할 확률을 구하라. $B\sim\mathrm{b}(10,0.75)$의 분포함수는 $P(B\le 4)=0.0197$, $P(B\le 9)=0.9437$이다.

(c) (5점) $R=F(X_{(n)})-F(X_{(1)})$은 구간 $[X_{(1)},X_{(n)}]$이 덮는 모집단의 비율이다. R의 분포가 F에 의존하지 않음을 보이고, $0<\gamma<1$에서 $P(R\ge\gamma)=1-n\gamma^{n-1}+(n-1)\gamma^n$임을 보여라. $n=20$, $\gamma=0.9$에서 이 확률을 구하라. $0.9^{19}\approx 0.1351$, $0.9^{20}\approx 0.1216$이다.

(d) (3점) $H_0:\ \xi_{0.5}=m_0$ 대 $H_1:\ \xi_{0.5}>m_0$를 $S=\#\{i:X_i>m_0\}$가 크면 기각하는 부호검정으로 한다. p-값 $p(s)=P_{H_0}(S\ge s)$에 대해 H_0 아래 모든 $u\in(0,1)$에서 $P\{p(S)\le u\}\le u$임을 보이고, $n=10$에서 $P_{H_0}\{p(S)\le 0.05\}$를 구하라.

풀이 (a) $B=\#\{i:X_i\le\xi_p\}$로 두면 지시함수 $1\{X_i\le\xi_p\}$가 iid이고 확률이 $F(\xi_p)=p$이므로 $B\sim\mathrm{b}(n,p)$이다(2회 정리 2.4). $\{X_{(r)}\le\xi_p\}$는 "ξ_p 이하인 관측이 r개 이상", 곧 $\{B\ge r\}$이다.

F가 연속이므로 $P(X_i = \xi_p) = 0$이고 $\{X_{(s)} > \xi_p\} = \{B \le s-1\}$이다 [T1]. 따라서

$$P\big(X_{(r)} \le \xi_p < X_{(s)}\big) = P(r \le B \le s-1) = \sum_{k=r}^{s-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

이고 F가 들어 있지 않다. $p = \frac{1}{2}$이면 8회 정리 2.6의 중앙값 구간이다.

(b) $P(5 \le B \le 9) = P(B \le 9) - P(B \le 4) = 0.9437 - 0.0197 = 0.9240$이다. 오른쪽 끝을 표본 최댓값으로 열어 두어도 92%이고, $X_{(10)}$을 닫힌 끝으로 바꾸어도 확률은 같다 ($P(X_{(10)} = \xi_p) = 0$).

(c) $U_i = F(X_i)$는 iid $\mathrm{U}(0,1)$이다(2회 정리 4.7). F가 증가하므로 $F(X_{(1)}) = U_{(1)}$, $F(X_{(n)}) = U_{(n)}$이고 $R = U_{(n)} - U_{(1)}$의 분포는 F와 무관하다. $(U_{(1)}, U_{(n)})$의 결합밀도는 $n(n-1)(v-u)^{n-2}$ $(0 < u < v < 1)$이다(8회 정리 1.2를 가운데 좌표로 적분). R의 밀도는 $n(n-1)r^{n-2}(1-r)$, 곧 $R \sim \mathrm{Beta}(n-1, 2)$이다(8회 연습 1.1). 따라서

$$P(R \ge \gamma) = \int_{\gamma}^{1} n(n-1)\big(r^{n-2} - r^{n-1}\big)\,dr = 1 - n\gamma^{n-1} + (n-1)\gamma^{n}$$

이다. $n = 20$, $\gamma = 0.9$이면 $1 - 20(0.1351) + 19(0.1216) = 0.608$이다. 범위 $[X_{(1)}, X_{(20)}]$이 모집단의 90% 이상을 덮을 확률이 61%뿐이다. 이 확률이 0.95를 넘으려면 $n = 46$이 필요하다.

(d) H_0 아래 $S \sim \mathrm{b}(n, \frac{1}{2})$이고 F에 의존하지 않는다. u를 고정하고 $s_u = \min\{s : P(S \ge s) \le u\}$로 두면, $p(s)$가 s에 대해 감소하므로 $\{p(S) \le u\} = \{S \ge s_u\}$이고 $P\{p(S) \le u\} = P(S \ge s_u) \le u$이다. S가 이산이어서 $p(S)$는 몇 개의 값만 갖고 대개 등호가 성립하지 않는다. 8회 정리 4.2의 균등성은 연속인 통계량에서만 성립한다. $n = 10$이면 $P(S \ge 8) = \frac{56}{1024} > 0.05$, $P(S \ge 9) = \frac{11}{1024}$이므로 $P\{p(S) \le 0.05\} = \frac{11}{1024} \approx 0.0107$이다. 명목 수준 5%의 검정이 실제로는 1.1%로 기각한다.

채점 기준 (a) 4점: B의 이항분포 1점, 두 사건의 동치(연속성으로 끝점 처리) 2점, F에 무관함 1점. (b) 3점: 사건의 식별 2점, 수치 1점. (c) 5점: 확률적분변환 1점, 결합밀도나 $\mathrm{Beta}(n-1,2)$ 2점, 꼬리 적분 1점, 수치 1점. (d) 3점: 부등식 1점, 이산성의 설명 1점, 수치 1점.

관련 2회 정리 2.4, 정리 4.7 · 8회 정리 1.2, 연습 1.1, 정리 2.6, 정의 4.1, 정리 4.2

최종답 (b) 0.9240 (c) $P(R \ge 0.9) \approx 0.608$ (d) $\frac{11}{1024} \approx 0.0107$

B4 분산이 같은 이변량 정규의 상관계수 20점 · 40분

(X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$이 iid이고, 평균이 $(0,0)$, 두 분산이 모두 σ^2, 상관계수가 ρ인 이변량 정규분포를 따른다. $\sigma^2 > 0$과 $|\rho| < 1$을 모두 모른다. $S = \sum_i (X_i^2 + Y_i^2)$, $P = \sum_i X_i Y_i$로 둔다.

(a) (4점) 로그가능도를 S와 P로 쓰고, MLE가 $\hat\sigma^2 = S/(2n)$, $\hat\rho = 2P/S$임을 보여라.

(b) (5점) 한 쌍의 Fisher 정보 행렬을 (σ^2, ρ)에 대해 구하라. 비대각 원소가 0이 아님을 확인하라.

(c) (5점) $\sqrt{n}(\hat\rho - \rho)$의 점근분산을 구하라. σ^2을 알 때 ρ의 MLE의 점근분산과 비교해, σ^2을 모르는 대가를 두 분산의 비로 나타내라.

(d) (4점) $n = 50$, $\hat\rho = 0.3$에서 $H_0 : \rho = 0$의 가능도비 통계량 $-2\log\Lambda$를 구하고 5% 수준에서 판정하라. $\log 0.91 \approx -0.0943$이고 $\chi^2(1)$의 0.95 분위수는 3.841이다.

(e) (2점) 같은 자료에서 Wald 통계량 $n\hat\rho^2/(1-\hat\rho^2)^2$을 구하고 (d)와 비교하라. $0.91^2 = 0.8281$이다.

풀이 (a) 한 쌍의 밀도는 $\dfrac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\!\left\{-\dfrac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}$이므로

$$\ell(\sigma^2, \rho) = -n\log(2\pi) - n\log\sigma^2 - \frac{n}{2}\log(1-\rho^2) - \frac{S - 2\rho P}{2\sigma^2(1-\rho^2)}.$$

ρ를 고정하고 σ^2으로 최대화하면 $\tilde\sigma^2(\rho) = \dfrac{S - 2\rho P}{2n(1-\rho^2)}$이고, 프로파일 로그가능도(10회 정의 1.7)는 상수를 빼고 $\ell_p(\rho) = -n\log(S - 2\rho P) + \frac{n}{2}\log(1-\rho^2)$이다. $\ell_p'(\rho) = \dfrac{2nP}{S-2\rho P} - \dfrac{n\rho}{1-\rho^2} = 0$을 정리하면 $2P(1-\rho^2) = \rho(S - 2\rho P)$, 곧 $\rho = 2P/S$이다. $2|x_i y_i| \le x_i^2 + y_i^2$이므로 $|2P| \le S$이고, 확률 1로 $|\hat\rho| < 1$이다. $\rho \to \pm 1$이면 $\ell_p \to -\infty$이므로 이 유일한 근이 최대다. 대입하면 $\hat\sigma^2 = \tilde\sigma^2(\hat\rho) = S/(2n)$이다.

(b) 한 쌍의 로그가능도에서 $q = x^2 - 2\rho xy + y^2$로 두면 $Eq = 2\sigma^2(1-\rho^2)$, $E\,xy = \rho\sigma^2$이다. 두 번 미분하고 기댓값을 취하면(10회 정리 1.2)

$$\begin{aligned}
I_{\sigma^2\sigma^2} &= -E\!\left[\frac{1}{\sigma^4} - \frac{q}{\sigma^6(1-\rho^2)}\right] = \frac{1}{\sigma^4},\\
I_{\sigma^2\rho} &= -E\!\left[-\frac{xy}{\sigma^4(1-\rho^2)} + \frac{\rho q}{\sigma^4(1-\rho^2)^2}\right] = -\frac{\rho}{\sigma^2(1-\rho^2)},\\
I_{\rho\rho} &= -E\!\left[\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2} + \frac{4\rho\,xy - q}{\sigma^2(1-\rho^2)^2} - \frac{4\rho^2 q}{\sigma^2(1-\rho^2)^3}\right] = \frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}.
\end{aligned}$$

마지막 줄의 괄호 안의 기댓값은 $\dfrac{(1+\rho^2) + 4\rho^2 - 2(1-\rho^2) - 8\rho^2}{(1-\rho^2)^2} = -\dfrac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}$이다. $\rho \neq 0$이면 비대각 원소가 0이 아니다.

(c) $\det I = \dfrac{1+\rho^2-\rho^2}{\sigma^4(1-\rho^2)^2} = \dfrac{1}{\sigma^4(1-\rho^2)^2}$이므로 $[I^{-1}]_{\rho\rho} = I_{\sigma^2\sigma^2}/\det I = (1-\rho^2)^2$이다. 같은 값을 Schur 보수(10회 보조정리 1.5)로 쓰면 $\left(I_{\rho\rho} - I_{\rho\sigma^2}^2/I_{\sigma^2\sigma^2}\right)^{-1} = (1-\rho^2)^2$이다. 10회 정리 1.3으로 $\sqrt{n}(\hat\rho - \rho) \xrightarrow{D} \mathcal{N}\!\left(0, (1-\rho^2)^2\right)$이다. σ^2을 알면 점근분산은 $1/I_{\rho\rho} = (1-\rho^2)^2/(1+\rho^2)$

이다(9회 정리 3.1). 비는 $1+\rho^2 \ge 1$이고, $\rho=0$이면 대가가 없고 $|\rho|\to 1$이면 분산이 두 배에 가까워진다(10회 정리 1.6).

조건 확인 밀도는 지수족이고 받침이 모수에 의존하지 않으며, 모수공간 $(0,\infty)\times(-1,1)$이 열린 집합이고 $\det I>0$이다. 따라서 9회와 10회의 정칙조건이 성립한다.

(d) H_0 아래 MLE는 $\tilde\sigma^2 = S/(2n)$로 전체 모형의 $\hat\sigma^2$과 같다. 두 최대값에서 $\frac{S-2\rho P}{2\sigma^2(1-\rho^2)}$ 항은 모두 n이므로 $-2\log\Lambda = 2(\hat\ell-\tilde\ell) = -n\log(1-\hat\rho^2)$이다. $n=50$, $\hat\rho=0.3$이면 $-50\log 0.91 = 4.715 > 3.841$이므로 5% 수준에서 기각한다(10회 정리 1.8; 귀찮은 모수 σ^2이 있어도 자유도는 1).

(e) $W = 50\times 0.09/0.8281 = 5.434$로 역시 기각한다. 두 통계량은 H_0 아래 같은 $\chi^2(1)$ 극한을 갖지만 유한 표본에서는 다르다. 점수 통계량은 $\rho=0$에서의 분산 1을 써서 $n\hat\rho^2 = 4.5$이다.

채점 기준 (a) 4점: 로그가능도 1점, MLE 유도(프로파일이나 연립방정식) 2점, 최대이고 $|\hat\rho|<1$인 확인 1점. (b) 5점: $I_{\sigma^2\sigma^2}$ 1점, $I_{\sigma^2\rho}$ 2점, $I_{\rho\rho}$ 2점. (c) 5점: 역행렬이나 Schur 보수 2점, $(1-\rho^2)^2$ 1점, σ^2을 알 때 1점, 비 $1+\rho^2$와 해석 1점. 정칙조건을 언급하지 않으면 1점 감점. (d) 4점: 두 최대값 2점, $-n\log(1-\hat\rho^2)$ 1점, 수치와 판정 1점. (e) 2점: 수치 1점, 비교 1점.

관련 9회 정리 3.1, 정리 5.2 · 10회 정리 1.2, 정리 1.3, 보조정리 1.5, 정리 1.6, 정의 1.7, 정리 1.8

최종답 (c) $(1-\rho^2)^2$ (d) 4.715 (e) 5.434

B5 두 지수 표본의 비교와 축차 검정

20점 · 40분

$X_1,\dots,X_m$은 평균 θ_1인 지수분포에서, $Y_1,\dots,Y_n$은 평균 θ_2인 지수분포에서 온 서로 독립인 표본이다. $H_0:\theta_1=\theta_2$ 대 $H_1:\theta_1\neq\theta_2$를 검정한다. $B = \sum_i X_i/\big(\sum_i X_i+\sum_j Y_j\big)$로 둔다.

(a) (5점) 가능도비가 $\Lambda = \dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} B^m(1-B)^n$ 임을 보여라.

(b) (5점) H_0 아래 $B\sim \mathrm{Beta}(m,n)$이고 $F = \dfrac{\sum_i X_i/m}{\sum_j Y_j/n} \sim F(2m,2n)$임을 보여라. 가능도비 검정의 기각역이 $\{B\le c_1\}\cup\{B\ge c_2\}$ 꼴임을 보이고, c_1과 c_2가 만족하는 두 식을 써라.

(c) (5점) $m=n=5$, $\sum x_i=30$, $\sum y_j=10$이다. 크기 0.05의 정확한 가능도비 검정을 F로 수행하라($F(10,10)$의 0.975 분위수는 3.717). 또 $-2\log\Lambda$를 계산해 Wilks 근사(3.841)의 판정과 비교하라. $\log 2\approx 0.6931$, $\log 3\approx 1.0986$이다.

(d) (5점) 이번에는 지수분포의 관측 $X_1, X_2, \dots$를 하나씩 보며 $H_0:\theta=1$ 대 $H_1:\theta=2$를 $\alpha=\beta=0.05$의 SPRT로 검정한다. Wald의 경계를 쓰고, H_1 아래 평균 표본 크기의 Wald 근사를 구하라. $\log 19\approx 2.944$이다.

풀이 (a) $S_x=\sum x_i$, $S_y=\sum y_j$로 두면 가능도는 $\theta_1^{-m}e^{-S_x/\theta_1}\theta_2^{-n}e^{-S_y/\theta_2}$이다. 전체 모형의 MLE는 S_x/m, S_y/n이고 최대값은 $(S_x/m)^{-m}(S_y/n)^{-n}e^{-(m+n)}$이다. H_0 아래 MLE는 $(S_x+$

$S_y)/(m+n)$이고 최대값은 $\left(\frac{S_x+S_y}{m+n}\right)^{-(m+n)}e^{-(m+n)}$이다. 비를 취하면(12회 정의 3.1)

$$\Lambda = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}\left(\frac{S_x}{S_x+S_y}\right)^m\left(\frac{S_y}{S_x+S_y}\right)^n.$$

(b) H_0 아래 공통 평균을 θ라 하면 $U = 2S_x/\theta \sim \chi^2(2m)$, $V = 2S_y/\theta \sim \chi^2(2n)$이고 독립이다(4회 정리 3.7, 정의 3.8). $B = U/(U+V)$이고 U, V는 같은 척도의 감마이므로 $B \sim \mathrm{Beta}(m,n)$이다(4회 정리 4.2). $F = \dfrac{U/(2m)}{V/(2n)} \sim F(2m,2n)$이다(6회 정의 4.1). $g(b) = b^m(1-b)^n$은 $(0,1)$에서 $b = \frac{m}{m+n}$까지 증가하고 그 뒤 감소하므로 $\{\Lambda \le k\} = \{B \le c_1\} \cup \{B \ge c_2\}$이다. 두 식은

$$c_1^m(1-c_1)^n = c_2^m(1-c_2)^n, \qquad P_{\mathrm{Beta}(m,n)}(c_1 < B < c_2) = 1-\alpha$$

이다($m \neq n$이면 두 꼬리의 확률이 다르다).

(c) $m = n$이면 g가 $\frac{1}{2}$에 대해 대칭이므로 $c_2 = 1-c_1$이다. B는 F의 증가함수이고 F와 $1/F$의 분포가 같으므로, 정확한 검정은 $F \ge 3.717$이거나 $F \le 1/3.717 = 0.269$이면 기각하는 등꼬리 F 검정이다. $F = (30/5)/(10/5) = 3$이므로 기각하지 않는다(정확한 양쪽 p-값 0.098). $B = 0.75$이므로

$$\Lambda = 2^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{2^{10}}, \qquad -2\log\Lambda = -2(5\log 3 - 10\log 2) = 2.877 < 3.841$$

이고 Wilks 근사(9회 정리 5.2)로도 기각하지 않는다.

(d) 한 관측의 로그가능도비는 $z = \log\dfrac{\frac{1}{2}e^{-x/2}}{e^{-x}} = \dfrac{x}{2} - \log 2$이다. Wald의 경계(12회 정리 4.2)는 $\log\frac{1-\beta}{\alpha} = \log 19 \approx 2.944$와 $\log\frac{\beta}{1-\alpha} = -2.944$이다. $\sum_{i\le k} z_i \ge 2.944$, 곧 $\sum_{i\le k} x_i \ge 2(2.944 + k\log 2)$이면 H_1을, $\sum_{i\le k} z_i \le -2.944$이면 H_0을 택한다. $E_{\theta=2}z = 1-\log 2 = 0.3069$이다. Wald의 등식(12회 보조정리 4.3) $E(\sum_{i\le N} z_i) = EN \cdot Ez$에서 경계를 넘는 양을 무시하면

$$E_{\theta=2}N \approx \frac{0.95\times 2.944 + 0.05\times(-2.944)}{0.3069} = \frac{0.9\times 2.944}{0.3069} \approx 8.6$$

이다. 같은 방법으로 $E_{\theta=1}N \approx 0.9\times 2.944/0.1931 \approx 13.7$이다. 같은 α, β의 고정 표본 검정은 $2\sum X_i/\theta \sim \chi^2(2n)$에서 $n = 23$이 필요하다.

조건 확인 Wald의 등식에는 $E|z| < \infty$와 $EN < \infty$가 필요하다. z는 지수분포의 일차식이므로 $E|z| < \infty$이고, $P(z>0) > 0$이므로 $P(N > km) \le (1-q)^k$에서 $EN < \infty$이다(12회 연습 4.3).

채점 기준 (a) 5점: 두 최대 가능도 3점, 정리 2점. (b) 5점: χ^2나 감마 1점, 베타 1점, F 1점, g의 단봉성으로 기각역의 꼴 1점, 두 식 1점. (c) 5점: 대칭으로 등꼬리 F 검정 2점, $F = 3$의 판정 1점, $-2\log\Lambda$ 계산 1점, Wilks와의 비교 1점. (d) 5점: z와 경계 2점, Wald 등식의

적용 2점, 수치 1점.

관련 4회 정리 3.7, 정의 3.8, 정리 4.2 · 6회 정의 4.1 · 9회 정리 5.2 · 12회 정의 3.1, 정의 4.1, 정리 4.2, 보조정리 4.3, 연습 4.3

최종답 (c) $-2\log\Lambda = 2.877$ (d) $E_{\theta=2}N \approx 8.6$

B6 Kendall의 불일치 쌍의 수

15점 · 25분

연속분포에서 온 쌍 (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$이 iid다. $i < j$인 쌍 가운데 $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0$인 것(불일치 쌍)의 수를 K라 하고, H_0: X와 Y가 독립이다를 검정한다.

(a) (4점) X의 순서로 늘어놓은 Y의 순위를 $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$이라 하자. $K = \#\{i < j : \pi_i > \pi_j\}$임을 보이고, H_0 아래 $V_j = \#\{i < j : \pi_i > \pi_j\}$ $(j = 2, \dots, n)$가 상호 독립이며 V_j가 $\{0, 1, \dots, j-1\}$ 위의 균등분포임을 보여라.

(b) (4점) H_0 아래 $EK = n(n-1)/4$, $\operatorname{Var} K = n(n-1)(2n+5)/72$임을 보여라.

(c) (4점) $n = 4$, 자료 (1.2, 0.8), (2.5, 1.9), (3.1, 1.7), (4.0, 3.5)에서 K를 구하라. 양의 연관을 대립가설로 하는 정확한 p-값 $P_{H_0}(K \le k_{\text{obs}})$를 구하라.

(d) (3점) $n = 10$에서 $K = 12$가 관측되었다. 정규근사로 한쪽 p-값을 구하고, 정규근사를 쓸 수 있는 근거를 한 줄로 밝혀라. $\sqrt{31.25} \approx 5.590$, $\Phi(-1.88) \approx 0.030$이다.

풀이 (a) 쌍을 X의 순서로 번호 붙이면(동점의 확률은 0) $i < j$에서 $X_i < X_j$이므로, 불일치는 $Y_i > Y_j$, 곧 $\pi_i > \pi_j$와 같다. H_0 아래 Y들은 X들과 독립인 iid 연속 확률변수이므로 π는 $n!$개의 순열 위의 균등분포다(15회 보조정리 1.3). V_j는 처음 j개 가운데 π_j가 위에서 $V_j + 1$번째임을 정하고, 이 상대 순위들이 $j = n, n-1, \dots$의 차례로 π를 하나로 정한다 [T3]. 따라서 π와 $(V_2, \dots, V_n) \in \prod_{j=2}^{n}\{0, \dots, j-1\}$은 일대일 대응이고(두 집합의 크기는 모두 $n!$), $(V_2, \dots, V_n)$은 곱집합 위의 균등분포, 곧 성분이 각각 균등하고 상호 독립인 분포다.

(b) $\{0, \dots, j-1\}$ 위의 균등분포는 평균 $\frac{j-1}{2}$, 분산 $\frac{j^2-1}{12}$이다. $K = \sum_{j=2}^{n} V_j$이므로 $EK = \sum_{j=1}^{n}\frac{j-1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$이다. 독립이므로 분산이 더해져(2회 정리 2.8) $\operatorname{Var} K = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n}(j^2-1) = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n\right] = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}$이다.

(c) X가 이미 커지는 순서이고 Y의 순위는 $(1, 3, 2, 4)$이므로 $K = 1$이다. $n = 4$의 귀무분포는 V_2, V_3, V_4의 합으로 세면 $k = 0, \dots, 6$에서 순열의 수가 $1, 3, 5, 6, 5, 3, 1$이다(합 24). $p = P(K \le 1) = \frac{1+3}{24} = \frac{1}{6}$이므로 양의 연관의 증거로 약하다.

(d) $z = (12-22.5)/5.590 = -1.88$이므로 $p \approx 0.030$이다. K는 독립이고 유계인 V_j의 합이고 $|V_j - EV_j| \le n/2$이므로, Lyapunov 비가 $\frac{n}{2s_n} = O(n^{-1/2}) \to 0$이다(7회 3절의 상자).

채점 기준 (a) 4점: 동치 1점, 균등한 순열 1점, 일대일 대응과 독립 2점. (b) 4점: 적률 2점, 합 2점. (c) 4점: K 1점, 귀무분포 2점, p-값 1점. (d) 3점: z와 p-값 2점, 근거 1점.

관련 2회 정리 2.8 · 7회 정리 3.1 · 15회 보조정리 1.3, 정리 1.5, 정리 1.8

최종답 (b) $\frac{n(n-1)(2n+5)}{72}$ (c) $K = 1$, $p = \frac{1}{6}$ (d) $p \approx 0.030$

C

모의고사 C

시간 180분, 6문항, 100점이다. 강의노트, 워크북, 증명 도구 상자를 덮고 푼다. 분위수와 거듭제곱처럼 필요한 수치는 문제에 주어져 있다. 각 소문항의 배점은 문항 안에 적혀 있다.

C1 독립인 사건열과 두 가지 수렴 15점 · 25분

사건열 $A_1, A_2, \dots$ 가 상호 독립이고 $P(A_n) = p_n$ 이며 $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ 이다. 확률변수열 Y_n 이 0으로 **거의 확실하게** 수렴한다는 것은 사건 $\{\omega : Y_n(\omega) \to 0\}$ 의 확률이 1이라는 뜻으로 쓴다. $\limsup_n A_n = \bigcap_{n\ge 1}\bigcup_{k\ge n} A_k$ 는 무한히 많은 A_k 가 일어나는 사건이다.

(a) (3점) X_n 이 0으로 확률수렴할 필요충분조건은 $p_n \to 0$ 임을 보여라.

(b) (5점) $n \le m$ 이면 $P\big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\big) = \prod_{k=n}^{m}(1-p_k) \le \exp\big(-\sum_{k=n}^{m} p_k\big)$ 임을 보이고, $\sum_n p_n = \infty$ 이면 $P(\limsup_n A_n) = 1$ 임을 보여라.

(c) (4점) $p_n = 1/n$ $(n \ge 2)$ 이면 $P\big(\bigcap_{k=10}^{100} A_k^c\big)$ 은 얼마인가? 이때 X_n 은 0으로 확률수렴하지만 거의 확실하게 수렴하지는 않음을 보여라.

(d) (3점) $p_n = 1/n^2$ $(n \ge 2)$ 이면 X_n 이 0으로 거의 확실하게 수렴함을 보이고, 어떤 A_n $(n \ge 2)$ 도 일어나지 않을 확률을 구하라.

풀이 (a) $0 < \varepsilon < 1$ 이면 $\{|X_n| > \varepsilon\} = A_n$ 이므로 $P(|X_n| > \varepsilon) = p_n$ 이다. 따라서 모든 $\varepsilon > 0$ 에서 $P(|X_n| > \varepsilon) \to 0$ 인 것($\varepsilon \ge 1$ 이면 확률은 0이다)과 $p_n \to 0$ 은 같다(7회 정의 1.2).

(b) A_n 들이 상호 독립이면 여사건들도 상호 독립이므로(1회 정리 5.11) $P\big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\big) = \prod_{k=n}^{m}(1-p_k)$ 이다. $1 - x \le e^{-x}$ [T4]를 각 인수에 쓰면 부등식이 나온다. m 에 대해 $\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c$ 는 감소하고 극한은 $\bigcap_{k\ge n} A_k^c$ 이므로 연속성(1회 정리 4.7(b))으로

$$P\Big(\bigcap_{k\ge n} A_k^c\Big) = \lim_{m\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big) \le \lim_{m\to\infty} \exp\Big(-\sum_{k=n}^{m} p_k\Big) = 0 \qquad \textstyle\sum p_k = \infty$$

이다. De Morgan으로 $(\limsup A_n)^c = \bigcup_n \bigcap_{k\ge n} A_k^c$ 이고, Boole 부등식(1회 정리 4.3(g))으로 이 합집합의 확률은 0이다. 따라서 $P(\limsup A_n) = 1$ 이다.

(c) $\prod_{k=10}^{100}\big(1 - \frac{1}{k}\big) = \prod_{k=10}^{100} \frac{k-1}{k} = \frac{9}{100}$ 이다(망원 곱). $p_n = \frac{1}{n} \to 0$ 이므로 (a)로 확률수렴한다. 그러나 $\sum 1/n = \infty$ 이므로 (b)로 확률 1로 무한히 많은 n 에서 $X_n = 1$ 이고, 그런 ω 에서 $X_n(\omega)$ 는 0으로 가지 않는다. $\{X_n \to 0\} \subset (\limsup A_n)^c$ 의 확률이 0이므로 거의 확실한 수렴은 일어나지 않는다. 같은 계산이 $P\big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\big) = \frac{n-1}{m} \to 0$ $(m \to \infty)$ 을 직접 보여 준다.

(d) $X_n \in \{0,1\}$이므로 $\{X_n \to 0\} = \bigcup_n \bigcap_{k\ge n} A_k^c = (\limsup A_n)^c$이다. 모든 n에서 $\limsup A_k \subset \bigcup_{k\ge n} A_k$이므로 Boole 부등식으로 $P(\limsup A_k) \le \sum_{k\ge n} 1/k^2 \to 0$이다. 따라서 $P(X_n \to 0) = 1$이다. 독립 가정은 쓰지 않았다. 마지막 확률은 연속성과 망원 곱으로

$$\prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big) = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} = \frac{N+1}{2N} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

채점 기준 (a) 3점: $\{|X_n| > \varepsilon\} = A_n$을 적으면 2점, $\varepsilon \ge 1$의 경우까지 다루면 1점. (b) 5점: 여사건의 독립과 곱 2점, $1-x \le e^{-x}$ 1점, 연속성으로 $m \to \infty$ 1점, 가산 합집합과 Boole로 마무리 1점. 연속성 없이 "극한을 취한다" 만 쓰면 1점 감점. (c) 4점: $\frac{9}{100}$ 2점, 확률수렴 1점, (b)를 써서 거의 확실한 수렴이 아님을 보이면 1점. (d) 3점: Boole로 첫째 보조정리 1점, 망원 곱 $\frac{1}{2}$ 2점.

관련 1회 정리 4.3(g), 정리 4.7, 정리 5.11; 7회 정의 1.2; 1회 워크북 C3·C4; 도구 [T4], [T5]

최종답 (c) $\frac{9}{100}$ (d) $\frac{1}{2}$

C2 Poisson 과정의 도착 시각

15점 · 25분

도착 비율이 λ인 Poisson 과정의 사건 사이 시간 E_1, E_2, E_3가 iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$이고 $T_k = E_1 + \cdots + E_k$는 k번째 도착 시각이다.

(a) (5점) (T_1, T_2, T_3)의 결합밀도가 $\lambda^3 e^{-\lambda t_3}$ $(0 < t_1 < t_2 < t_3)$임을 변수변환으로 보여라. 그리고 $U_1 = T_1/T_3$, $U_2 = T_2/T_3$로 두면 (U_1, U_2)는 T_3와 독립이고 삼각형 $\{0 < u_1 < u_2 < 1\}$ 위의 밀도 2인 균등분포를 따름을 보여라.

(b) (4점) $E\big[T_1 T_2 / T_3^2\big]$를 구하라.

(c) (3점) $E(T_1 \mid T_3 = s)$를 구하라.

(d) (3점) 첫 도착이 셋째 도착 시각의 절반보다 늦을 확률 $P(T_1 > T_3/2)$를 구하라.

풀이 (a) 변환 $(e_1, e_2, e_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3) = (e_1,\ e_1+e_2,\ e_1+e_2+e_3)$은 $(0,\infty)^3$을 $\{0 < t_1 < t_2 < t_3\}$ 위로 보내는 일대일 대응이고, 역변환 $e_1 = t_1$, $e_2 = t_2 - t_1$, $e_3 = t_3 - t_2$의 Jacobian 행렬은 대각이 1인 삼각행렬이라 행렬식이 1이다. 3회 정리 5.1로

$$f_T(t_1,t_2,t_3) = \lambda^3 e^{-\lambda[t_1 + (t_2-t_1) + (t_3-t_2)]} \cdot 1 = \lambda^3 e^{-\lambda t_3} \qquad (0 < t_1 < t_2 < t_3).$$

다음으로 $(t_1, t_2, t_3) = (u_1 s,\ u_2 s,\ s)$의 Jacobian 행렬은 $\begin{pmatrix} s & 0 & u_1 \\ 0 & s & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$이고 행렬식은 s^2이다. 따라서

$$f(u_1,u_2,s) = \lambda^3 e^{-\lambda s} s^2 \cdot 1\{0<u_1<u_2<1\} = \underbrace{2\cdot 1\{0<u_1<u_2<1\}}_{(U_1,U_2)} \cdot \underbrace{\frac{\lambda^3 s^2 e^{-\lambda s}}{2}}_{T_3 \sim \Gamma(3,\lambda)}.$$

결합밀도가 두 인수의 곱으로 갈라지므로 (U_1, U_2)와 T_3은 독립이다(3회 정리 3.2). 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{2}$이므로 첫 인수는 균등분포의 밀도다. 이것은 두 균등 확률변수의 순서통계량의 결합밀도와 같다.

(b) $T_1T_2/T_3^2 = U_1U_2$이므로 $E[U_1U_2] = \int_0^1\int_0^{u_2} 2u_1u_2\,du_1du_2 = \int_0^1 u_2^3\,du_2 = \frac{1}{4}$이다. 두 iid 균등 확률변수 V_1, V_2로 쓰면 $U_1U_2 = V_1V_2$이므로 $(EV_1)^2 = \frac{1}{4}$로도 바로 나온다.
(c) $T_1 = U_1T_3$이고 $U_1 \perp T_3$이므로 $E(T_1 \mid T_3 = s) = sEU_1$이다. $EU_1 = \int_0^1\int_0^{u_2} 2u_1\,du_1du_2 = \int_0^1 u_2^2\,du_2 = \frac{1}{3}$이므로 $E(T_1 \mid T_3 = s) = \frac{s}{3}$이다.
(d) $P(T_1 > T_3/2) = P(U_1 > \frac{1}{2}) = 2\cdot$넓이$\{\frac{1}{2} < u_1 < u_2 < 1\} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$이다. 답이 λ에 의존하지 않는 것은 (a)의 독립성 때문이다.

채점 기준 (a) 5점: 첫 변환과 Jacobian 1 2점, 둘째 변환의 Jacobian s^2 2점, 밀도가 곱으로 갈라져 독립임을 근거와 함께 밝히면 1점. Jacobian의 절댓값이나 정의역을 빠뜨리면 1점 감점. (b) 4점: U_1U_2로 바꾸기 2점, 적분 2점. (c) 3점: 독립을 써서 sEU_1로 바꾸기 2점, $\frac{1}{3}$ 1점. (d) 3점: $U_1 > \frac{1}{2}$로 바꾸기 1점, 넓이 계산 2점.

관련 3회 정리 5.1, 정리 3.2; 4회 정의 3.1, 정리 3.2, 정의 3.6, 정리 4.2; 8회 정리 1.2; 도구 [T7]

최종답 (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{s}{3}$ (d) $\frac{1}{4}$

C3 Pareto 척도 모수: 비정칙 모형의 추정과 검정

20점 · 40분

$X_1, \dots, X_n$이 iid이고 밀도가 $f(x;\theta) = a\theta^a x^{-(a+1)}$ $(x \ge \theta)$이다. 모양 $a > 0$은 알고 척도 $\theta > 0$은 모른다. 필요하면 $0.05^{1/15} = 0.8190$, $1.1^{15} = 4.177$을 쓴다.

(a) (4점) θ의 MLE $\hat\theta$를 구하고 $P_\theta(\hat\theta > t)$를 구하라.

(b) (3점) $n(\hat\theta - \theta)$의 극한분포를 구하고 그 평균을 적어라. 정칙 모형의 $\sqrt{n}$과 비교하라.

(c) (5점) $X_{(1)}$이 완비충분통계량임을 보이고 θ의 UMVUE와 그 분산을 구하라($na > 2$).

(d) (3점) 점수의 평균 $E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta)\right]$를 구해 Cramér–Rao 부등식의 조건이 깨짐을 보여라. $n = 5$, $a = 3$에서 UMVUE의 분산과 형식적인 한계 $\theta^2/(na^2)$의 비 $\mathrm{Var}(\text{UMVUE})\big/\left(\theta^2/(na^2)\right)$를 구하라.

(e) (3점) $n = 5$, $a = 3$에서 $H_0 : \theta \le 1$ 대 $H_1 : \theta > 1$의 크기 0.05 UMP 검정을 구하라. 기각 경계 c는 얼마인가?

(f) (2점) (e)의 검정의 $\theta = 1.1$에서의 검정력을 구하라.

풀이 (a) 가능도는 $L(\theta) = a^n\theta^{na}\prod x_i^{-(a+1)}\cdot 1\{\theta \le x_{(1)}\}$이다. $\theta \le x_{(1)}$에서 θ^{na}은 증가하므로 $\hat\theta = X_{(1)}$이다. 독립으로 $P_\theta(X_{(1)} > t) = \prod_i P_\theta(X_i > t) = \left[(\theta/t)^a\right]^n = (\theta/t)^{na}$ $(t \ge \theta)$이다. 곧 $\hat\theta$는 모양 na의 Pareto 분포를 따른다.
(b) $u \ge 0$이면

$$P\big(n(\hat\theta - \theta) > u\big) = \left(1 + \frac{u}{n\theta}\right)^{-na} \longrightarrow e^{-au/\theta} \qquad (1 + x/n)^n \to e^x \text{ [T8]}$$

이므로 $n(\hat\theta - \theta)$는 비율 a/θ의 지수분포, 평균 θ/a로 분포수렴한다(7회 정의 2.1). 오차가 $1/n$의 속도로 줄어 정칙 모형의 $1/\sqrt{n}$보다 빠르고, 극한은 정규가 아니며 한쪽으로만 치우친다.

(c) 인수분해 정리(11회 정리 1.3)로 $L = [\theta^{na}1\{x_{(1)} \ge \theta\}] \cdot [a^n \prod x_i^{-(a+1)}]$이므로 $X_{(1)}$이 충분하다. 완비성: $m = na$로 두면 $X_{(1)}$의 밀도는 $m\theta^m t^{-m-1}$ $(t \ge \theta)$이다. 모든 θ에서 $E_\theta g(X_{(1)}) = m\theta^m \int_\theta^\infty g(t)t^{-m-1}dt = 0$이면 $\int_\theta^\infty g(t)t^{-m-1}dt = 0$이 모든 θ에서 성립하고, θ로 미분하면 $g(\theta)\theta^{-m-1} = 0$, 곧 $g = 0$이다(연속인 g의 경우; 일반적으로는 거의 모든 점에서). 따라서 완비다(11회 정의 3.1). $E_\theta X_{(1)} = \int_\theta^\infty m\theta^m t^{-m}dt = \frac{m}{m-1}\theta$이므로 $T = \left(1-\frac{1}{na}\right)X_{(1)}$이 불편이고, Lehmann–Scheffé(11회 정리 3.3)로 UMVUE다. $EX_{(1)}^2 = \frac{m}{m-2}\theta^2$이므로

$$\operatorname{Var} T = \left(\frac{m-1}{m}\right)^2\left[\frac{m}{m-2} - \frac{m^2}{(m-1)^2}\right]\theta^2 = \frac{\theta^2}{m(m-2)} = \frac{\theta^2}{na(na-2)}.$$

(d) $x \ge \theta$에서 $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta) = \frac{a}{\theta}$이므로 점수의 평균은 $\frac{a}{\theta} \ne 0$이다. 9회 정리 2.2의 $E(\text{점수}) = 0$은 $\int f\,dx = 1$을 θ로 미분해 얻는데, 적분 구간의 아래 끝이 θ여서 적분 기호 아래의 미분이 성립하지 않는다 [T6]. 그래서 Cramér–Rao 부등식(9회 정리 2.4)의 전제가 깨진다. 형식적으로 $E(\text{점수}^2) = a^2/\theta^2$를 넣은 한계는 $\theta^2/(na^2) = \theta^2/45$이고 UMVUE의 분산은 $\theta^2/(15\cdot 13) = \theta^2/195$이므로 비는 $\frac{45}{195} = \frac{3}{13}$이다. 분산이 "한계"의 4분의 1보다 작다.

(e) $\theta_1 < \theta_2$이면 $L(\theta_2)/L(\theta_1)$은 $x_{(1)} < \theta_2$에서 0, $x_{(1)} \ge \theta_2$에서 $(\theta_2/\theta_1)^{na}$로 $x_{(1)}$의 감소하지 않는 함수다. 단조가능도비(12회 정의 2.2)이므로 Karlin–Rubin(12회 정리 2.4)으로 "$X_{(1)} > c$이면 기각"이 UMP이고, $P_1(X_{(1)} > c) = c^{-15} = 0.05$에서 $c = 0.05^{-1/15} = 1/0.8190 = 1.221$이다.

(f) $\theta = 1.1 < c$이면 $P_{1.1}(X_{(1)} > c) = (1.1/c)^{15} = 1.1^{15}\cdot 0.05 = 4.177 \times 0.05 = 0.209$이다.

채점 기준 (a) 4점: 지시함수를 포함한 가능도 1점, $\hat\theta = X_{(1)}$과 그 근거(경계에서 최대) 2점, 분포 1점. 미분해서 0으로 두는 풀이는 0점. (b) 3점: 극한 계산 2점, $1/n$ 속도의 비교 1점. (c) 5점: 인수분해 1점, 완비성 증명 2점, UMVUE 1점, 분산 1점. (d) 3점: 점수의 평균 a/θ 1점, 미분과 적분의 교환이 깨지는 이유 1점, 비 $\frac{3}{13}$ 1점. (e) 3점: 단조가능도비 확인 1점, 검정의 꼴과 c 2점. (f) 2점.

관련 9회 정의 1.1, 정리 2.2, 정리 2.4; 8회 정리 1.2; 7회 정의 2.1; 11회 정리 1.3, 정의 3.1, 정리 3.3; 12회 정의 2.2, 정리 2.4; 도구 [T6], [T8]

최종답 (b) θ/a (c) $\frac{\theta^2}{na(na-2)}$ (d) $\frac{3}{13}$ (e) $c = 1.221$ (f) 0.209

C4 평균을 아는 정규 표본의 척도: Basu와 Rao–Blackwell 15점 · 25분

$X_1, \dots, X_n$이 iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$이고 $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$, $W = X_1^2 / T$이다. $EZ^4 = 3$ ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$)을 써도 된다. $F(1, 9)$의 위쪽 5% 분위수는 5.117이다.

(a) (4점) T가 σ^2의 완비충분통계량이고 W가 보조통계량임을 보이고, W와 T가 독립임을 보여라.

(b) (4점) $EX_1^4 = E[W^2 T^2]$에 (a)를 써서 EW^2를 구하라. $n = 10$이면 얼마인가?

(c) (4점) $E(X_1^4 \mid T)$를 구하고 σ^4의 UMVUE를 구하라. $n = 10$, $T = 20$이면 그 값은?

(d) (3점) $(n-1)W/(1-W) \sim F(1, n-1)$임을 보이고, $n = 10$에서 $P(W > w) = 0.05$인 w를 구하라.

풀이 (a) 결합밀도는 $(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\!\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2\right)$로 자연모수 $-\frac{1}{2\sigma^2}$의 1-모수 지수족이고, 자연모수 공간이 열린 구간 $(-\infty, 0)$을 포함하므로 T는 완비충분통계량이다(11회 정리 4.5). $X_i = \sigma Z_i$로 쓰면 $W = Z_1^2 / \sum Z_i^2$이므로 W의 분포는 σ에 의존하지 않는다. 곧 보조통계량이다(11회 정의 5.1). Basu의 정리(11회 정리 5.2)로 모든 σ에서 $W \perp T$이다.

(b) $X_1^2 = WT$이므로 $EX_1^4 = E[W^2T^2] = EW^2 \cdot ET^2$이다(독립). $EX_1^4 = 3\sigma^4$이고, $T/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$이므로(4회 정리 3.9) $ET^2 = \operatorname{Var} T + (ET)^2 = 2n\sigma^4 + n^2\sigma^4 = n(n+2)\sigma^4$이다. 따라서 $EW^2 = \frac{3}{n(n+2)}$이고 $n = 10$이면 $\frac{3}{120} = \frac{1}{40}$이다.

(c) $E(X_1^4 \mid T) = E(W^2T^2 \mid T) = T^2 E(W^2 \mid T) = T^2 EW^2 = \frac{3T^2}{n(n+2)}$이다(셋째 등호에서 $W \perp T$). $X_1^4/3$은 σ^4의 불편추정량이므로 Rao–Blackwell(11회 정리 2.1)로 $E(X_1^4/3 \mid T) = \frac{T^2}{n(n+2)}$은 불편이고 완비충분통계량의 함수다. Lehmann–Scheffé(11회 정리 3.3)로 UMVUE다. 확인: $E\,T^2/(n(n+2)) = \sigma^4$이다. $n = 10$, $T = 20$이면 $\frac{400}{120} = \frac{10}{3}$이다.

(d) $\frac{(n-1)W}{1-W} = \frac{X_1^2/\sigma^2}{\sum_{i\ge 2} X_i^2/\{(n-1)\sigma^2\}}$이고 분자와 분모는 독립인 $\chi^2(1)$과 $\chi^2(n-1)/(n-1)$이므로 $F(1, n-1)$이다(6회 정의 4.1). $w \mapsto 9w/(1-w)$는 증가하므로 $P(W > w) = P\!\left(F(1,9) > \frac{9w}{1-w}\right) = 0.05$에서 $\frac{9w}{1-w} = 5.117$, $w = \frac{5.117}{14.117} = 0.3625$이다. (a)로 이 확률은 T가 주어져도 같다.

채점 기준 (a) 4점: 지수족과 완비충분 2점, 척도 불변으로 보조 1점, Basu 1점. 완비성의 근거(자연모수 공간이 열린 구간을 포함)가 없으면 1점 감점. (b) 4점: 독립으로 곱 쪼개기 2점, $ET^2 = n(n+2)\sigma^4$ 1점, 답 1점. (c) 4점: 조건부기댓값 2점, UMVUE와 근거(Rao–Blackwell, Lehmann–Scheffé) 1점, 값 1점. (d) 3점: F 분포 확인 2점, w 1점.

관련 11회 정리 4.5, 정의 5.1, 정리 5.2, 정리 2.1, 정리 3.3; 4회 정리 3.9; 6회 정의 4.1; 11회 워크북 A의 Basu 계산과 같은 방법

최종답 (b) $\frac{3}{n(n+2)} = \frac{1}{40}$ (c) $\frac{T^2}{n(n+2)} = \frac{10}{3}$ (d) 0.3625

C5 세 처리의 완전무작위설계 20점 · 40분

12개 실험 단위를 세 처리 A, B, C에 4개씩 완전히 무작위로 배정했다. 반응은 다음과 같다.

처리	반응			
A	8	10	9	13
B	12	14	11	15
C	16	17	19	20

모형은 $y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$, ε_{ij} iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$이다. $F_{0.05}(2, 9) = 4.256$, $\sqrt{17/9} = 1.374$, $\sqrt{2 \times 4.256} = 2.918$, t_9의 위쪽 0.05/6 분위수는 2.933이다.

(a) (6점) 분산분석표(SS, 자유도, MS)를 만들고 F 통계량을 구해 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$을 수준 0.05에서 검정하라.

(b) (4점) 반응이 처리와 무관하다는 날카로운 귀무가설 아래의 무작위화 검정을 생각한다. 가능한 배정은 몇 가지인가? F 통계량을 쓰는 무작위화 검정의 p-값이 가질 수 있는 가장 작은 값은 얼마인가? 이 검정의 크기가 정확한 이유를 한 문단으로 쓰라.

(c) (5점) $\mu_3 - \mu_1$의 95% Scheffé 구간을 구하라. 세 쌍의 비교에 Bonferroni를 쓴 구간의 반폭과 비교하라.

(d) (5점) 참 평균이 $(10, 12, 14)$이고 $\sigma = 2$이면 F 검정의 비중심도 λ는 얼마인가? 이때 검정력은 $P\big(F(2, 9, \lambda) > 4.256\big) = 0.560$이다. 단위 수를 처리마다 8개로 늘리면 λ는 얼마가 되고 검정력은 왜 커지는가?

풀이 (a) 처리 평균은 10, 13, 18, 전체 평균은 $\frac{41}{3}$이다. $\mathrm{SS}_{\text{처리}} = 4\big[(-\frac{11}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 + (\frac{13}{3})^2\big] = 4 \cdot \frac{121+4+169}{9} = \frac{392}{3} = 130.67$이다. 처리 안의 편차제곱합은 A: $4 + 0 + 1 + 9 = 14$, B: $1 + 1 + 4 + 4 = 10$, C: $4 + 1 + 1 + 4 = 10$이므로 $\mathrm{SS}_E = 34$이다.

요인	SS	자유도	MS	F
처리	130.67	2	65.33	17.29
오차	34.00	9	3.778	
전체	164.67	11		

$F = \frac{196/3}{34/9} = \frac{294}{17} = 17.29 > 4.256$이므로 H_0를 기각한다(14회 정리 2.2).
(b) 배정은 $\frac{12!}{4!\,4!\,4!} = 34{,}650$가지이고, 무작위화로 모두 같은 확률이다. F는 세 무리의 이름을 바꿔도 변하지 않으므로, 관측된 배정과 이름만 바꾼 $3! = 6$개의 배정이 모두 관측값 이상의 F를 준다. 따라서 p-값은 적어도 $\frac{6}{34650} = \frac{1}{5775}$이다. 날카로운 귀무가설 아래에서는 12개의 반응이 배정과 무관하게 정해져 있으므로, 배정을 다시 뽑아 계산한 F의 분포가 바로 관측된 F의 귀무분포다. 그래서 $p \le \alpha$로 기각하는 검정의 크기는 정규성 가정 없이 α 이하다(14회 정리 1.7). 이 자료는 값이 모두 달라 가장 큰 F를 주는 분할이 이름 바꾸기를 빼고 하나

뿐이므로 최솟값 $\frac{1}{5775}$에 실제로 닿을 수 있다. 34,650가지를 모두 계산하면 관측된 F 이상인 배정은 30개, $p = 0.00087$이다.

(c) 대비 $\hat{\mu}_3 - \hat{\mu}_1 = 8$의 표준오차는 $\sqrt{\mathrm{MS}_E(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})} = \sqrt{17/9} = 1.374$이다. Scheffé(14회 정리 4.4)의 곱수는 $\sqrt{(3-1)F_{0.05}(2,9)} = 2.918$이므로 반폭은 $2.918 \times 1.374 = 4.010$이고 구간은 $[3.99,\ 12.01]$이다. Bonferroni(14회 명제 4.2)로 세 쌍을 각각 수준 0.05/3으로 보면 곱수는 2.933, 반폭은 4.031이다. 이 설계에서는 모든 대비를 덮는 Scheffé가 세 쌍만 덮는 Bonferroni보다 조금 좁다. 처리가 셋뿐이어서 Scheffé의 곱수가 작기 때문이다.

(d) $\lambda = \sum_i n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2/\sigma^2 = 4(4+0+4)/4 = 8$이다(14회 정리 2.8). 처리마다 8개면 $\lambda = 8 \cdot 8/4 = 16$이고 오차의 자유도는 21로 늘어난다. 비중심 χ^2의 꼬리확률이 λ의 증가함수이고(14회 정리 2.5(e)), 오차 자유도가 커지면 기각 경계 $F_{0.05}(2,21)$이 4.256보다 작아지므로 검정력이 커진다($F_{0.05}(2,21) = 3.467$이고 검정력은 약 0.92다).

채점 기준 (a) 6점: 평균 1점, 두 SS 각 1점, 자유도와 MS 1점, F와 결론 2점. (b) 4점: 배정의 수 1점, 최소 p-값과 이름 바꾸기 논리 2점, 정확성의 이유 1점. p-값의 최솟값을 1/34650으로 쓰면 1점 감점. (c) 5점: 표준오차 1점, Scheffé 곱수와 구간 2점, Bonferroni 반폭 1점, 비교 1점. (d) 5점: $\lambda = 8$ 2점, $\lambda = 16$ 1점, 검정력이 커지는 두 이유 2점.

관련 14회 정리 2.2, 정리 1.7, 정리 4.4, 명제 4.2, 정리 2.8, 정리 2.5(e); 13회 정리 4.9

최종답 (a) $F = \frac{294}{17} \approx 17.29$ (b) $\frac{6}{34650} = \frac{1}{5775}$ (c) 8 ± 4.010 (d) $\lambda = 8$

C6 사고 수의 경험적 Bayes

15점 · 25분

운전자 i의 한 해 사고 수가 $X_i \mid \lambda_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i)$이고 사고 성향 λ_i는 iid $\Gamma(\alpha, \beta)$(모양 α, 비율 β, 평균 α/β)이다. 노트북의 `check`에서는 α, β를 `alpha`, `beta`로 쓴다. $0.75^{10} = 0.0563$이다.

(a) (4점) λ의 사후분포와 사후평균 $E(\lambda \mid X = x)$를 구하고, 사후평균이 x와 사전평균의 가중평균임을 보여라.

(b) (4점) 제곱오차 손실에서 X와 사후평균의 Bayes 위험을 각각 구하라.

(c) (4점) 운전자 200명의 사고 수의 표본평균이 2.0, 표본분산이 3.0이었다. X의 주변 평균과 분산을 써서 α, β를 적률법으로 추정하고, 사고를 6번 낸 운전자의 경험적 Bayes 추정값을 구하라.

(d) (3점) (c)의 추정값을 참값으로 보고, 사고를 6번 낸 운전자가 다음 해에 사고를 한 번도 내지 않을 확률 $P(Y = 0 \mid X = 6)$을 구하라. $Y \mid \lambda \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$는 λ가 주어지면 X와 독립이다.

풀이 (a) 사후밀도는 $\propto e^{-\lambda}\lambda^{x}\cdot\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}=\lambda^{\alpha+x-1}e^{-(\beta+1)\lambda}$ 이므로 $\Gamma(\alpha+x,\ \beta+1)$이다(16회 정리 1.2). 사후평균은

$$E(\lambda\mid x)=\frac{\alpha+x}{\beta+1}=\frac{1}{\beta+1}\,x+\frac{\beta}{\beta+1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$$

로 관측 x와 사전평균 α/β의 가중평균이다. β가 클수록(사전분포가 좁을수록) 사전평균 쪽으로 많이 끌린다.

(b) X의 위험은 $E[(X-\lambda)^2\mid\lambda]=\lambda$이므로 Bayes 위험은 $E\lambda=\alpha/\beta$이다. 사후평균의 Bayes 위험은 사후분산의 기댓값(16회 정리 2.1)이므로 $E\big[\frac{\alpha+X}{(\beta+1)^2}\big]=\frac{\alpha+\alpha/\beta}{(\beta+1)^2}=\frac{\alpha}{\beta(\beta+1)}$이다. 비는 $\frac{1}{\beta+1}$이다.

(c) 4회 정리 5.2로 $EX=E\lambda=\alpha/\beta$, $\operatorname{Var}X=E\lambda+\operatorname{Var}\lambda=\alpha/\beta+\alpha/\beta^2$이다. $\alpha/\beta=2$, $\alpha/\beta^2=3-2=1$을 풀면 $\hat\beta=2$, $\hat\alpha=4$이다. 경험적 Bayes 추정값은 $\frac{4+6}{2+1}=\frac{10}{3}=3.33$이다. 관측값 6이 집단 평균 2 쪽으로 3분의 1만 남기고 당겨진다.

(d) $P(Y=0\mid X=6)=E\big(e^{-\lambda}\mid X=6\big)$이고 사후분포 $\Gamma(10,3)$의 mgf를 $t=-1$에서 계산하면 $\big(\frac{3}{3+1}\big)^{10}=0.75^{10}=0.0563$이다(4회 정리 3.7). 사후평균 $\frac{10}{3}$을 그대로 넣은 $e^{-10/3}=0.036$은 사후분포의 퍼짐을 무시한 값이고 더 작다(Jensen).

채점 기준 (a) 4점: 사후분포 2점, 가중평균의 꼴 2점. (b) 4점: X의 위험 1점, 사후평균의 위험 2점, 비 또는 비교 1점. (c) 4점: 주변 분산 식 2점, 추정값 1점, 경험적 Bayes 값 1점. (d) 3점: 조건부 독립으로 $E(e^{-\lambda}\mid x)$로 바꾸기 1점, mgf 계산 2점. 사후평균을 대입한 $e^{-10/3}$은 1점.

관련 16회 정리 1.2, 정리 2.1, 정리 5.4(정규 모형의 같은 생각); 4회 정리 5.2, 정리 5.3, 정리 3.7; 2회 정리 5.9(Jensen)

최종답 (a) $\frac{\alpha+x}{\beta+1}$ (b) $\frac{\alpha}{\beta(\beta+1)}$ (c) $\frac{10}{3}$ (d) $0.75^{10}\approx0.0563$

문항별 출제 범위

각 문항이 쓰는 회차를 적었다. 쓰인 정리의 번호는 각 풀이의 **관련** 줄에 있다. 틀린 문항은 그 회차의 단계형 증명과 워크북 B부로 돌아가 다시 푼다.

문항	주제	회차
A1	기록값의 수: 지시함수, 평균과 분산, Markov·Chebyshev 한계, 확률수렴	1, 2, 3, 15
A2	지수분포의 비: 변수변환, 조건부기댓값, 전분산 공식	3, 4
A3	생존확률의 두 추정량: 델타 방법, 점근 효율, 모형이 틀릴 때의 일치성	7, 15
A4	Pareto 형상 모수: MLE와 정보, Cramér–Rao, UMVUE, 단조가능도비와 UMP	4, 9, 11, 12
A5	직교 다항식 회귀: 최소제곱, Gauss–Markov, 일반선형가설 F	13
A6	척도 손실의 Bayes 추정: 켤레 사후분포, 상수 위험, 허용성, minimax	4, 16
B1	두 Poisson 과정과 Chernoff 한계	2, 3, 4
B2	무게가 다른 정규 관측의 t 구간: 회전, χ^2, Student	4, 5, 6
B3	분포에 무관한 분위수 구간과 허용구간, 부호검정 p-값의 보수성	2, 8
B4	분산이 같은 이변량 정규의 상관계수: 정보행렬, 귀찮은 모수의 대가, LRT와 Wald	9, 10
B5	두 지수 표본: 가능도비의 정확분포(F), Wilks 근사, SPRT와 Wald의 경계	4, 6, 9, 12
B6	Kendall의 불일치 쌍: 독립 분해, 정확분포, 정규근사	2, 7, 15
C1	독립인 사건열: 둘째 Borel–Cantelli, 확률수렴과 거의 확실한 수렴	1, 7
C2	Poisson 과정의 도착 시각: Jacobian, 균등 순서통계량	3, 4, 8
C3	Pareto 척도 모수: 비정칙 모형의 MLE와 극한(속도 n), 완비충분, UMVUE, UMP	7, 8, 9, 11, 12
C4	평균을 아는 정규 표본의 척도: 완비충분, Basu, Rao–Blackwell, F 분포	4, 6, 11
C5	세 처리의 완전무작위설계: 분산분석, 무작위화 검정, Scheffé와 Bonferroni, 비중심도	13, 14
C6	사고 수의 경험적 Bayes: Poisson–감마, Bayes 위험, 적률법	2, 4, 16

A4와 C3은 같은 Pareto 분포족을 쓴다. A4의 형상 모수는 정칙 모형이라 Cramér–Rao와 $\sqrt{n}$ 점근정규성이 성립하고, C3의 척도 모수는 받침이 모수에 의존하는 비정칙 모형이라 둘 다 성립하지 않는다. 두 문항을 이어서 풀면 정칙 조건이 어디에 쓰이는지 비교할 수 있다.

회차별 문항

1회	A1, C1	**9회**	A4, B4, B5, C3
2회	A1, B1, B3, B6, C6	**10회**	B4
3회	A1, A2, B1, C2	**11회**	A4, C3, C4
4회	A2, A4, A6, B1, B2, B5, C2, C4, C6	**12회**	A4, B5, C3
5회	B2	**13회**	A5, C5
6회	B2, B5, C4	**14회**	C5
7회	A3, B6, C1, C3	**15회**	A1, A3, B6
8회	B3, C2, C3	**16회**	A6, C6