수리통계학 × 통계학의 역사

14회 워크북 — 풀이판

분산분석과 실험설계
손으로 푸는 34문항

학생판과 같은 문제에 빈칸의 답과 완전한 풀이를 붙였다. 학생판으로 먼저 풀고, 힌트와 최종답으로도 막힐 때 이 판을 본다.

부	하는 일	문항	예상 시간
A 계산 드릴	배정의 열거, 분산분석표, 비중심도, 기준값을 손으로 계산한다	14	2시간 2분
B 빈칸 증명	노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다	7	2시간 50분
C 증명 문제	변형, 일반화, 반례 만들기	9	2시간 40분
D 퀄형	여러 절을 잇는 종합 문제. 제한 시간 안에	4	2시간 25분
	합계	34	약 10시간

노트 `14_anova_design_notes.pdf` — 문항의 "정리 1.4" 같은 번호는 노트의 번호다

도구 `00_toolkit_notes.pdf` — [T1] 원소 추적, [T2] 귀류·반례, [T4] Cauchy–Schwarz, [T6] 극한과 적분의 교환

검산 노트북 `14_anova_design.ipynb`의 "워크북 검산" 절: `check("A1a", "2/5")`

이 워크북을 쓰는 법

1. **노트를 덮고 푼다.** 문제의 머리 오른쪽에 쓸 도구, 관련 정리 번호, 예상 시간이 있다. 예상 시간의 두 배가 지나도 진척이 없으면 그때 노트를 편다.
2. **막히면 3단으로 본다.** 뒤의 **힌트와 최종답**에서 힌트를 먼저 본다. 다 푼 뒤에는 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나거나 증명이 막히면 풀이판을 본다.
3. **B부는 순서대로 푼다.** 같은 정리를 여러 번 만난다. 처음에는 근거만 빈칸이고(①), 다음에는 단계의 이름만 있고(②), 마지막에는 전략만 있다(③). 앞 단계의 답을 보면서 다음 단계를 쓰지 않는다.
4. **계산은 검산한다.** 최종답이 수나 식인 문항은 노트북의 `check()`에 넣으면 맞는지만 알려 준다. 정답은 보여 주지 않는다. 분위수가 필요한 문항은 문제에 그 값을 적어 두었다. 그 값으로 계산한 소수는 맞다고 본다.
5. **증명은 근거를 단다.** 등호와 부등호마다 어느 정의, 정리, 앞 회차의 결과를 썼는지 오른쪽에 적는다. 노트의 단계형 증명과 같은 모양이다.

표시 ★ 정의를 바로 쓰는 문제, ★★ 두세 단계를 잇는 문제, ★★★ 퀄에 나오는 길이의 문제. [T1]–[T8]은 증명 도구 상자의 도구 번호다.

A

계산 드릴

작은 실험의 배정을 직접 세고, 분산분석표를 손으로 채운다. 답이 수나 식으로 떨어지므로 다 풀면 뒤의 최종답이나 노트북의 `check()`로 맞춰 본다. 계산기는 마지막 나눗셈과 제곱근에만 쓴다.

A1 배정 지시변수의 적률 ★

보조정리 1.3 · 6분

단위 10개 가운데 4개를 처치에 배정하는 완전무작위설계에서 (a) EW_i, (b) $\operatorname{Var} W_i$, (c) $i \neq j$ 일 때 $\operatorname{Cov}(W_i, W_j)$를 구하라.

풀이 (a) $P(W_i=1) = \binom{9}{3}/\binom{10}{4} = \frac{84}{210} = \frac{2}{5}$. (b) $\operatorname{Var} W_i = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$. (c) $P(W_i=W_j=1) = \binom{8}{2}/\binom{10}{4} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$ 이므로 $\operatorname{Cov}(W_i,W_j) = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} = \frac{10-12}{75} = -\frac{2}{75}$ 이다. 보조정리 1.3의 식 $-\frac{n_T n_C}{n^2(n-1)} = -\frac{24}{900}$ 과 같다. 검산: $10\cdot\frac{6}{25} + 90\cdot\left(-\frac{2}{75}\right) = \frac{12}{5} - \frac{12}{5} = 0 = \operatorname{Var}\sum_i W_i$.

최종답 (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{6}{25}$ (c) $-\frac{2}{75}$

A2 단위 넷의 Neyman 분산 ★★

정리 1.4 · 15분

단위 4개의 잠재적 결과가 다음과 같다. 두 단위를 무작위로 골라 처치한다($n_T = n_C = 2$).

단위	1	2	3	4
$y_i(1)$	5	7	6	10
$y_i(0)$	3	4	6	7

(a) 평균 처치효과 $\bar\tau$를 구하라. (b) 정리 1.4로 $\operatorname{Var}\hat\tau$를 구하라. (c) 6가지 배정을 모두 적어 $\hat\tau$의 값들을 구하고 (a)와 (b)를 확인하라.

풀이 (a) $\tau_i = (2,3,0,3)$이므로 $\bar\tau = 2$이다. (b) $\bar y(1) = 7$, $S_1^2 = \frac{4+0+1+9}{3} = \frac{14}{3}$ 이다. $\bar y(0) = 5$, $S_0^2 = \frac{4+1+1+4}{3} = \frac{10}{3}$ 이다. $S_\tau^2 = \frac{0+1+4+1}{3} = 2$이다. 정리 1.4로 $\operatorname{Var}\hat\tau = \frac{14/3}{2} + \frac{10/3}{2} - \frac{2}{4} = \frac{7}{3}+\frac{5}{3}-\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$이다. (c) 처치 집합마다 $\hat\tau = \bar y_T - \bar y_C$는 $\{1,2\}$: $6-6.5=-0.5$, $\{1,3\}$: $5.5-5.5=0$, $\{1,4\}$: $7.5-5=2.5$, $\{2,3\}$: $6.5-5=1.5$, $\{2,4\}$: $8.5-4.5=4$, $\{3,4\}$: $8-3.5=4.5$이다. 합이 12이므로 평균은 2이고, 제곱의 평균은 $\frac{0.25+0+6.25+2.25+16+20.25}{6} = 7.5$이므로 분산은 $7.5-4=3.5$이다.

최종답 (a) $\bar\tau = 2$ (b) $\frac{7}{2}$

A3 컵 열 개의 감별 ★

예제 1.8, 정리 1.7 · 6분

컵 10개 가운데 무작위로 고른 5개에 우유를 먼저 붓고, 숙녀에게 그 5개를 고르게 한다. 숙녀가 가리지 못한다면(날카로운 귀무가설) (a) 다섯 개를 모두 맞힐 확률과 (b) 넷 이상 맞힐 확률을 구하라.

풀이 $\binom{10}{5} = 252$이다. (a) $P(K=5) = \frac{1}{252}$이다. (b) $P(K=4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{5}{1}}{252} = \frac{25}{252}$이므로 $P(K \ge 4) = \frac{26}{252} = \frac{13}{126} \approx 0.103$이다. 넷을 맞혀도 5%에서 의미가 없고, 다섯을 모두 맞혀야 한다.

최종답 (a) $\frac{1}{252}$ (b) $\frac{13}{126} \approx 0.103$

A4 다섯 짝의 부호 뒤집기 ★

예제 1.9, 정리 1.7 · 10분

짝 5개의 차이(처치 − 대조)가 $3, -1, 4, 2, 5$이다. 짝마다 동전으로 처치를 정했다고 보고, 날카로운 귀무가설 아래 $\sum d_i$의 무작위화 분포로 (a) 한쪽 p-값 $P(\sum \pm|d_i| \ge 13)$과 (b) 양쪽 p-값 $P(|\sum \pm|d_i|| \ge 13)$을 구하라.

풀이 $2^5 = 32$가지 부호가 같은 확률이다. 부호를 $-$로 바꾼 $|d_i|$들의 합을 s라 하면 합은 $15 - 2s$이고, $15 - 2s \ge 13 \iff s \le 1$이다. $s=0$(아무것도 바꾸지 않음)과 $s=1$($|d_i|=1$만 바꿈, 관측값이 이것이다)의 2가지이므로 (a) $p = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$이다. (b) 분포가 0에 대해 대칭이므로 ≤ -13인 것도 2가지이고 $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$이다.

최종답 (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{1}{8}$

A5 일원분산분석표를 손으로 ★

정리 2.2 · 10분

세 처치의 관측값이 A: 4, 6, 8, B: 7, 9, 11, C: 10, 12, 14이다. (a) SS_B, (b) SS_W, (c) F를 구하라.

풀이 처치 평균은 6, 9, 12, 전체 평균은 9다. (a) $\mathrm{SS}_B = 3\left[(6-9)^2+0+(12-9)^2\right] = 54$. (b) 처치마다 편차가 $-2, 0, 2$이므로 $\mathrm{SS}_W = 3\cdot 8 = 24$. (c) 자유도는 2와 6이므로 $F = \frac{54/2}{24/6} = \frac{27}{4} = 6.75$이다. 검산: 전체 제곱합 $\sum (y-9)^2 = 78 = 54 + 24$.

최종답 (a) 54 (b) 24 (c) $\frac{27}{4}$

A6 비중심 χ^2의 적률 ★

정리 2.5 · 6분

$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_3(\boldsymbol{\mu}, I)$이고 $\boldsymbol{\mu} = (1, 2, 2)'$이다. $Q = \|\mathbf{X}\|^2$에 대해 (a) 비중심도 λ, (b) EQ, (c) $\operatorname{Var} Q$를 구하라.

풀이 (a) $\lambda = \|\boldsymbol{\mu}\|^2 = 1+4+4 = 9$. (b) $EQ = k + \lambda = 12$. (c) $\operatorname{Var} Q = 2k + 4\lambda = 6 + 36 = 42$.

최종답 (a) 9 (b) 12 (c) 42

A7 비중심 χ^2의 mgf ★

정리 2.5(b)(c) · 8분

$Q \sim \chi^2(2, \lambda = 2)$이다. (a) $Ee^{Q/4}$를 구하라. (b) 정리 2.5(c)의 혼합 표현에서 Q가 자유도 2인 중심 χ^2에서 나올 확률 $P(J = 0)$을 구하라.

풀이 (a) $t = \frac{1}{4}$이면 $1 - 2t = \frac{1}{2}$이므로 $Ee^{Q/4} = (\frac{1}{2})^{-1} \exp\!\left(\frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\right) = 2e \approx 5.437$이다. (b) $J \sim \text{Poi}(1)$이므로 $P(J = 0) = e^{-1} \approx 0.368$이다.

최종답 (a) $2e \approx 5.437$ (b) $e^{-1} \approx 0.368$

A8 검정력의 비중심도 ★

정리 2.8 · 8분

일원배치에서 처치 3개, 처치마다 5개 단위, 참 평균이 $(10, 12, 14)$, $\sigma = 2$이다. (a) F 검정의 비중심도 λ를 구하라. (b) $\sigma = 4$이면 λ는 얼마인가?

풀이 (a) $\lambda = 5\big[(10-12)^2 + 0 + (14-12)^2\big]/4 = 40/4 = 10$. (b) σ가 두 배이면 λ는 네 배로 줄어 $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$이다. 같은 검정력을 얻으려면 처치마다 단위가 대략 네 배 필요하다.

최종답 (a) 10 (b) $\frac{5}{2}$

A9 2×2 배치의 다섯 조각 ★★

정리 3.2 · 15분

칸마다 2개씩의 관측이 있다.

	B1	B2
A1	3, 5	6, 8
A2	7, 9	14, 16

(a) SS_A, (b) SS_B, (c) SS_{AB}, (d) SS_E, (e) 상호작용의 F를 구하라.

풀이 칸 평균은 A1B1 4, A1B2 7, A2B1 8, A2B2 15이고, A 평균은 5.5와 11.5, B 평균은 6과 11, 전체 평균은 8.5다. (a) $\text{SS}_A = br\sum_i(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2 = 4(9+9) = 72$. (b) $\text{SS}_B = ar\sum_j(\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y})^2 = 4(6.25 + 6.25) = 50$. (c) 상호작용 조각은 $4 - 5.5 - 6 + 8.5 = 1$, $7 - 5.5 - 11 + 8.5 = -1$, -1, 1이므로 $\text{SS}_{AB} = r \cdot 4 = 8$. (d) 칸마다 편차가 ± 1이므로 $\text{SS}_E = 4 \cdot 2 = 8$. (e) 자유도는 1과

$ab(r-1)=4$이므로 $F_{AB}=\frac{8/1}{8/4}=4$이다. 검산: $\mathrm{SS}_T=\sum(y-8.5)^2=138=72+50+8+8$.

최종답 (a) 72 (b) 50 (c) 8 (d) 8 (e) 4

A10 분할구의 두 오차 ★

명제 3.6 · 8분

주구마다 세구가 3개인 분할구 설계에서 주구 효과의 분산이 $\sigma_w^2=2$, 세구 오차의 분산이 $\sigma^2=3$이다. (a) $E\,\mathrm{MS}_{\text{주구 오차}}$와 (b) $E\,\mathrm{MS}_{\text{세구 오차}}$를 구하라. (c) 두 품종이 각각 주구 6개(세구 18개)를 받았을 때, 두 품종 평균의 차의 분산을 구하라.

풀이 (a) $\sigma^2+3\sigma_w^2=3+6=9$. (b) $\sigma^2=3$. (c) 한 품종의 평균에는 주구 6개의 η 평균과 세구 18개의 ε 평균이 들어 있으므로 분산은 $\frac{2}{6}+\frac{3}{18}=\frac{1}{2}$이다. 두 품종은 서로 다른 주구를 쓰므로 차의 분산은 1이다. 이것은 $2\cdot\frac{9}{18}$, 곧 주구 오차의 기대평균제곱으로 쓴 값과 같다.

최종답 (a) 9 (b) 3 (c) 1

A11 독립인 검정 열 개 ★

명제 4.2 · 6분

참인 귀무가설 10개를 독립인 검정으로 확인한다. (a) 각각을 Bonferroni의 크기 0.005로 하면 FWER은 얼마인가? (b) 각각을 0.05로 하면?

풀이 (a) $1-0.995^{10}\approx 0.0489$로 0.05보다 조금 작다. Bonferroni의 한계 0.05와의 차이는 독립일 때도 작다. (b) $1-0.95^{10}\approx 0.401$이다.

최종답 (a) $1-0.995^{10}\approx 0.0489$ (b) $1-0.95^{10}\approx 0.401$

A12 Scheffé와 Tukey의 기준 ★

정리 4.4, 4.6 · 8분

처치 4개, 처치마다 6개, 오차의 평균제곱 $s^2=10$, 자유도 $\nu=20$인 일원배치다. $F_{3,20,0.05}=3.098$, $q_{4,20,0.05}=3.958$을 쓴다. (a) 대비 하나의 t 통계량에 대한 Scheffé의 기준값 $\sqrt{qF_{q,\nu,\alpha}}$를 구하라. (b) Tukey의 정직한 유의차 HSD를 구하라.

풀이 (a) $\sqrt{3\cdot 3.098}=\sqrt{9.294}=3.049$이다. 대비 하나의 t 구간 기준 $t_{20,0.025}=2.086$보다 크다. (b) $\mathrm{HSD}=3.958\sqrt{10/6}=3.958\cdot 1.291=5.11$이다. 짝의 차이가 5.11보다 크면 유의하다.

최종답 (a) $\sqrt{3\cdot 3.098}\approx 3.049$ (b) $3.958\sqrt{10/6}\approx 5.11$

A13 짝 넷의 효율 ★★

정리 5.1 · 10분

대조 아래의 잠재적 결과가 짝 $(a_i, b_i) = (10, 12),\ (14, 15),\ (8, 7),\ (12, 14)$이다. 처치효과는 상수다. (a) 8개 값의 분산 S^2(분모 7), (b) 짝 안의 분산 $S_w^2 = \frac{1}{2m}\sum(a_i - b_i)^2$, (c) 짝 설계의 상대효율 S^2/S_w^2을 구하라.

풀이 (a) 편차의 제곱은 $2.25, 0.25, 6.25, 12.25, 12.25, 20.25, 0.25, 6.25$이고 합이 60이므로 $S^2 = \frac{60}{7} \approx 8.57$. (b) $\sum(a_i - b_i)^2 = 4+1+1+4 = 10$이므로 $S_w^2 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$. (c) $\frac{60/7}{5/4} = \frac{48}{7} \approx 6.86$이다. 짝의 두 값이 거의 같아서 짝 설계 하나가 완전무작위설계 7개에 가까운 값을 한다.

최종답 (a) $\frac{60}{7}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{48}{7} \approx 6.86$

A14 공변량 보정과 표본 크기 ★

정리 8.2 · 6분

실험 전 지표와 실험 중 지표의 상관이 $\rho = 0.6$이다. (a) 공변량 보정으로 $\hat{\tau}$의 분산이 몇 배가 되는가? (b) 보정 없이 군마다 1000명이 필요한 정밀도를 보정하면 몇 명으로 얻는가?

풀이 (a) $1 - 0.36 = 0.64 = \frac{16}{25}$배. (b) 분산은 $1/n$에 비례하므로 $1000 \cdot 0.64 = 640$명이다.

최종답 (a) 0.64 (b) 640

B

빈칸 증명

노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다. 같은 정리를 여러 번 만나며 도움이 줄어든다. ① 단계는 주어지고 근거만 빈칸이다. ② 단계의 이름만 주어진다. ③ 전략만 주어진다. 근거에는 정의나 정리의 번호, 앞 회차의 결과, 도구 번호를 쓴다.

B1 Neyman의 분산, 근거 채우기 ★★

① · 정리 1.4 · 15분

완전무작위설계에서 $E\hat{\tau} = \bar{\tau}$이고 $\operatorname{Var}\hat{\tau} = \frac{S_1^2}{n_T} + \frac{S_0^2}{n_C} - \frac{S_\tau^2}{n}$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $a_i = y_i(1)/n_T + y_i(0)/n_C$로 두면 $\hat{\tau} = \sum_i W_i a_i - \sum_i y_i(0)/n_C$이다.
$y_i = W_i y_i(1) + (1 - W_i) y_i(0)$

② $\hat{\tau} - \bar{\tau} = \sum_i (W_i - n_T/n) a_i$이다.
$\frac{n_T}{n n_C} - \frac{1}{n_C} = -\frac{1}{n}$

③ $E\hat{\tau} = \bar{\tau}$이다.
$EW_i = n_T/n$, 보조정리 1.3

④ $\operatorname{Var}\hat{\tau} = \frac{n_T n_C}{n^2}\left(\sum_i a_i^2 - \frac{1}{n-1}\sum_{i \neq j} a_i a_j\right)$이다.
보조정리 1.3의 분산과 공분산

⑤ $= \frac{n_T n_C}{n(n-1)} \sum_i (a_i - \bar{a})^2$이다.
$\sum_{i \neq j} a_i a_j = (\sum a_i)^2 - \sum a_i^2$

⑥ $= \frac{n_C}{n}\frac{S_1^2}{n_T} + \frac{n_T}{n}\frac{S_0^2}{n_C} + \frac{2S_{10}}{n}$이다.
a_i를 펼친 표본공분산의 쌍선형성

⑦ 정리의 식이 된다.
$2S_{10} = S_1^2 + S_0^2 - S_\tau^2$

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 정리 1.4의 단계형 증명과 같다. ②에서 $\sum_i \frac{n_T}{n} a_i - \sum_i \frac{y_i(0)}{n_C} = \bar{y}(1) + \left(\frac{n_T}{n n_C} - \frac{1}{n_C}\right)\sum_i y_i(0) = \bar{y}(1) - \bar{y}(0) = \bar{\tau}$이고, ①에서 이것을 빼면 $\sum_i (W_i - n_T/n) a_i$가 남는다.

B2 일원분산분석, 근거 채우기 ★★

① · 정리 2.2 · 20분

일원배치에서 $\mathrm{SS}_T = \mathrm{SS}_B + \mathrm{SS}_W$이고 H_0 아래 $F \sim F(t-1, N-t)$이며 F 검정은 가능도비 검정이다. 근거를 채워라.

① $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\bar{y}_{1\cdot}, \dots, \bar{y}_{t\cdot})'$이고 $(H\mathbf{y})_{ij} = \bar{y}_{i\cdot}$이다. — 정규방정식, $X'X = \mathrm{diag}(n_i)$

② $HJ = JH = J$이고 $H-J$, $I-H$는 계수 $t-1$, $N-t$인 대칭 멱등행렬이다. — $\mathbf{1} = X\mathbf{1}_t \in \mathrm{col}(X)$

③ $\mathrm{SS}_T = \mathrm{SS}_B + \mathrm{SS}_W$이다. — $(H-J)(I-H) = 0$, 피타고라스

④ $I = J + (H-J) + (I-H)$이고 계수의 합이 N이다. — $1 + (t-1) + (N-t) = N$

⑤ H_0 아래 $\mathrm{SS}_B/\sigma^2 \sim \chi^2(t-1)$과 $\mathrm{SS}_W/\sigma^2 \sim \chi^2(N-t)$가 독립이다. — $(H-J)\mu\mathbf{1} = \mathbf{0}$, 13회 Cochran

⑥ F 검정은 가능도비 검정이다. — 13회 정리 4.9(d), $\mathrm{RSS}_0 - \mathrm{RSS} = \mathrm{SS}_B$

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 정리 2.2의 단계형 증명과 같다. ⑤의 독립은 13회 따름정리 4.2, 곧 직교하는 사영의 이차형식은 독립이라는 것에서 나온다. ⑥에서 제약 아래의 적합이 $J\mathbf{y}$인 것은 모든 평균이 같다는 제약 아래 최소제곱추정량이 전체 평균이기 때문이다.

B3 Scheffé의 동시구간, 근거 채우기 ★★

① · 정리 4.4 · 15분

모든 $\mathbf{c} \in \mathcal{L} = \{C'\mathbf{a}\}$에 대해 $|\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}| \le \sqrt{qF_{q,n-p,\alpha}}\, s\sqrt{\mathbf{c}'(X'X)^{-1}\mathbf{c}}$일 확률이 $1-\alpha$이다. 근거를 채워라.

① $\mathbf{u} = C(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$, $W = C(X'X)^{-1}C'$로 두면 $\mathbf{c}'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{a}'\mathbf{u}$, $\mathbf{c}'(X'X)^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{a}'W\mathbf{a}$이다. — $\mathbf{c} = C'\mathbf{a}$를 대입

② W는 양정치다. — C의 계수 q, $(X'X)^{-1}$ 양정치

③ $\sup_{\mathbf{c}} \dfrac{(\mathbf{c}'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}))^2}{s^2\,\mathbf{c}'(X'X)^{-1}\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{u}'W^{-1}\mathbf{u}}{s^2}$이다. — 보조정리 4.3 (Cauchy–Schwarz)

④ $\mathbf{u}'W^{-1}\mathbf{u}/(qs^2) \sim F(q, n-p)$이다. — $\mathbf{d} = C\boldsymbol{\beta}$, 13회 정리 4.9

⑤ "모든 $\mathbf{c}$가 부등식을 만족한다"의 확률은 $1-\alpha$이다. — 모든 $\mathbf{c} \iff$ 최댓값 $\le qF$

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 정리 4.4의 단계형 증명과 같다. ③의 최댓값은 $\mathbf{a} \propto W^{-1}\mathbf{u}$에서 이루어지므로 실제로 도달한다. 그래서 ⑤의 두 사건은 정확히 같고 부등호가 아니라 등호 $1-\alpha$가 나온다.

B4 Neyman의 분산, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 1.4 · 25분

정리 1.4를 증명하라. 단계의 이름만 주어진다. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① $\hat{\tau}$를 a_i와 W_i로 쓴다

② $\hat{\tau}-\bar{\tau}$를 중심화한 지시변수의 일차결합으로 쓴다

③ 평균을 구한다

④ 공분산 행렬로 분산을 쓴다

⑤ $\sum_i (a_i-\bar{a})^2$을 S_1^2, S_0^2, S_{10}으로 펼친다

⑥ S_{10}을 S_τ^2로 바꾼다

풀이 노트 정리 1.4의 증명 ①–⑥과 같다. 다섯째 단계는

$$\frac{1}{n-1}\sum_i (a_i-\bar{a})^2 = \frac{S_1^2}{n_T^2} + \frac{S_0^2}{n_C^2} + \frac{2S_{10}}{n_T n_C}$$

이고 여기에 $\frac{n_T n_C}{n}$을 곱한다. 여섯째 단계는 $S_\tau^2 = \frac{1}{n-1}\sum\big((y_i(1)-\bar{y}(1))-(y_i(0)-\bar{y}(0))\big)^2 = S_1^2+S_0^2-2S_{10}$이다.

B5 일원분산분석, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 2.2 · 25분

정리 2.2를 증명하라.

① 최소제곱추정량과 $H\mathbf{y}$를 구한다

② $H-J$와 $I-H$가 대칭 멱등임을 보인다

③ 제곱합의 분해

④ Cochran의 조건을 확인한다

⑤ H_0 아래의 분포

⑥ 가능도비 검정임을 보인다

풀이 노트 정리 2.2의 증명 ①–⑥과 같다. 둘째 단계의 계산은 $(H-J)^2 = H^2-HJ-JH+J^2 = H-J-J+J = H-J$이고, 계수는 대각합으로 $\operatorname{tr}H-\operatorname{tr}J = t-1$, $\operatorname{tr}(I-H) = N-t$이다. 넷째 단계의 계수의 합 $1+(t-1)+(N-t)=N$이 Cochran 정리의 조건이다.

B6 Neyman의 분산, 전략만 ★★

③ · 정리 1.4 · 35분

정리 1.4를 증명하라.

전략 $\hat{\tau}-\bar{\tau}$를 중심화한 배정 지시변수 $W_i - n_T/n$의 일차결합으로 쓴다. 평균은 0이고, 분산은 보조정리 1.3의 분산과 공분산으로 계산하는 이차형식이다.

풀이 B4의 풀이와 같다. 이 증명에서 확률은 배정 W에서만 온다. 잠재적 결과는 상수이고, 쓴 것은 보조정리 1.3의 배정 지시변수의 적률뿐이다. 그래서 정리는 어떤 모집단 모형도 없이 성립한다.

B7 Scheffé의 동시구간, 전략만 ★★

③ · 정리 4.4 · 35분

정리 4.4를 증명하라. 보조정리 4.3도 함께 증명하라.

전략 무한히 많은 대비에 대한 부등식을 최댓값 하나에 대한 부등식으로 바꾼다. 그 최댓값은 Cauchy–Schwarz로 계산되고, 참값에서 잰 일반선형가설의 F 통계량이 된다.

풀이 보조정리 4.3: $(\mathbf{a}'\mathbf{u})^2 = \left((W^{1/2}\mathbf{a})'(W^{-1/2}\mathbf{u})\right)^2 \le (\mathbf{a}'W\mathbf{a})(\mathbf{u}'W^{-1}\mathbf{u})$이고 등호는 $\mathbf{a} \propto W^{-1}\mathbf{u}$일 때다. 따라서 $\sup_{\mathbf{a}\neq\mathbf{0}}(\mathbf{a}'\mathbf{u})^2/\mathbf{a}'W\mathbf{a} = \mathbf{u}'W^{-1}\mathbf{u}$이다. 정리 4.4의 나머지는 B3의 풀이와 같다. 일원배치의 대비에서는 $q = t-1$이고 $\mathbf{c}'(X'X)^{-1}\mathbf{c} = \sum c_i^2/n_i$이다.

C

증명 문제

노트의 정리를 변형하고, 일반화하고, 반례로 경계를 확인한다. 증명은 노트의 단계형 모양으로 쓴다. 한 줄에 한 단계, 줄마다 근거.

C1 Neyman 분산 추정의 치우침 ★★

정리 1.4, 연습 1.3 · 20분

완전무작위설계에서 $\hat{V} = s_T^2/n_T + s_C^2/n_C$로 둔다($s_T^2, s_C^2$는 두 군의 표본분산).

(a) $E\hat{V} - \operatorname{Var}\hat{\tau} = S_\tau^2/n \geq 0$임을 보이고, 등호가 성립할 필요충분조건을 말하라. (노트 연습 1.3의 $Es_T^2 = S_1^2$을 써도 된다.)

(b) A2의 잠재적 결과에서 $E\hat{V}$를 구하고 $\operatorname{Var}\hat{\tau} = \frac{7}{2}$와 비교하라.

풀이 (a) 노트 연습 1.3으로 $Es_T^2 = S_1^2$이고, 처치와 대조의 역할을 바꾸면 $Es_C^2 = S_0^2$이다. 따라서 $E\hat{V} = S_1^2/n_T + S_0^2/n_C$이고, 정리 1.4를 빼면 $E\hat{V} - \operatorname{Var}\hat{\tau} = S_\tau^2/n \geq 0$이다. 등호는 $S_\tau^2 = 0$, 곧 모든 단위의 처치효과 τ_i가 같을 때뿐이다. (b) $E\hat{V} = \frac{14/3}{2} + \frac{10/3}{2} = 4$이다. 참 분산 3.5보다 $S_\tau^2/n = 2/4 = 0.5$만큼 크다. 효과가 단위마다 다르면 표준오차는 보수적인 쪽으로 틀린다.

최종답 (b) $E\hat{V} = 4$

C2 무작위화 검정의 정확한 크기 ★★

정리 1.7 · 20분

배정이 M개의 원소를 갖는 $\mathcal{W}$ 위에서 균등하고, 날카로운 귀무가설 아래 $T(w, \mathbf{y})$가 M개의 배정에서 모두 다른 값을 가진다고 하자.

(a) $P\big(p(W) \leq \alpha\big) = \lfloor \alpha M \rfloor / M$임을 보여라.

(b) $M = 70$, $\alpha = 0.05$이면 이 크기는 얼마인가?

(c) 홍차 실험(예제 1.8)의 크기가 (b)보다 작은 1/70인 이유를 설명하라.

풀이 (a) T의 값을 큰 것부터 $t_{(1)} > \cdots > t_{(M)}$이라 하면 $T(W) = t_{(k)}$일 때 $p(W) = k/M$이다. W가 균등하고 값이 모두 다르므로 k는 $\{1, \ldots, M\}$ 위에서 균등하다. 따라서 $P(p(W) \leq \alpha) = P(k \leq \alpha M) = \lfloor \alpha M \rfloor / M$이다. (b) $\lfloor 3.5 \rfloor / 70 = \frac{3}{70} \approx 0.043$이다. (c) 홍차 실험의 통계량 K(맞힌 개수)는 70개 배정에서 다섯 값만 가진다. p-값은 $\frac{1}{70}, \frac{17}{70}, \ldots$로 뛰므로 $p \leq 0.05$인 것은 $K = 4$의 한 배정뿐이다. 값이 겹치면 p-값이 띄엄띄엄해져 크기가 $\lfloor \alpha M \rfloor / M$보다 더

작아진다.

최종답 (b) $\frac{3}{70}$

C3 비중심 χ^2의 단조성, 미분으로 ★★

정리 2.5(a)(e) · 20분

(a) $k=1$이고 $a=\sqrt{\lambda}$이면 $P(\chi^2(1,\lambda)>c)=\Phi(-\sqrt{c}-a)+1-\Phi(\sqrt{c}-a)$임을 보이고, 이것을 a로 미분해 $a\ge 0$에서 증가함을 보여라.

(b) 정리 2.5(a)로 $\chi^2(k,\lambda)$를 $(Z_1+\sqrt{\lambda})^2+V$ ($V\sim\chi^2(k-1)$, Z_1과 독립)로 쓰고, (a)로 일반 k에서 단조성을 다시 증명하라.

(c) $c=1.96^2$, $\lambda=1$이면 $P(\chi^2(1,\lambda)>c)$는 얼마인가? ($\Phi(-2.96)=0.0015$, $\Phi(-0.96)=0.1685$)

풀이 (a) $\chi^2(1,\lambda)$는 $(Z+a)^2$의 분포이고(정리 2.5(a)), $(Z+a)^2>c \iff Z>\sqrt{c}-a$ 또는 $Z<-\sqrt{c}-a$이다. 따라서 확률은 $1-\Phi(\sqrt{c}-a)+\Phi(-\sqrt{c}-a)$이다. a로 미분하면 $\varphi(\sqrt{c}-a)-\varphi(\sqrt{c}+a)$이고, $a\ge 0$이면 $|\sqrt{c}-a|\le\sqrt{c}+a$이며 φ는 $|x|$의 감소함수이므로 도함수가 0 이상이다. (b) 정리 2.5(a)로 평균 벡터를 $(\sqrt{\lambda},0,\dots,0)$으로 돌리면 $\|\mathbf{X}\|^2=(Z_1+\sqrt{\lambda})^2+V$이고 $V\sim\chi^2(k-1)$은 Z_1과 독립이다. $V=v$에 조건을 걸면 $P((Z_1+a)^2>c-v)$는 $c-v\le 0$이면 1이고, 아니면 (a)로 a의 증가함수다. V의 분포는 λ와 무관하므로 평균해도 증가함수다. (c) $0.0015+0.1685=0.170$이다. 비중심도 1이면 5% 검정의 검정력이 0.17이다.

최종답 (c) 0.170

C4 처치 제곱합의 짝 표현 ★★

정리 2.2 · 15분

일원배치에서 다음을 보여라.

$$\mathrm{SS}_B=\frac{1}{N}\sum_{i<j} n_i n_j(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{j\cdot})^2$$

A5의 자료로 확인하라.

풀이 $\sum_{i,j} n_i n_j(\bar{y}_i-\bar{y}_j)^2=\sum_{i,j} n_i n_j(\bar{y}_i^2+\bar{y}_j^2-2\bar{y}_i\bar{y}_j)=2N\sum_i n_i\bar{y}_i^2-2\big(\sum_i n_i\bar{y}_i\big)^2$이다. $\sum_i n_i\bar{y}_i=N\bar{y}$이므로 이것은 $2N\big(\sum_i n_i\bar{y}_i^2-N\bar{y}^2\big)=2N\,\mathrm{SS}_B$이다(노트 연습 2.1). $i<j$인 짝은 전체 합의 절반이므로 정리의 식이 나온다. A5: $\frac{1}{9}\cdot 9\cdot(9+36+9)=54$로 같다.

C5 임의효과 일원배치 ★★★

명제 3.6, 6회 · 30분

$y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij}$ $(i = 1,\dots,t,\ j = 1,\dots,n)$이고 $a_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma_a^2)$, $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$가 모두 독립이다.

(a) $E\,\mathrm{MS}_W = \sigma^2$, $E\,\mathrm{MS}_B = \sigma^2 + n\sigma_a^2$임을 보여라.

(b) $\mathrm{MS}_B/\mathrm{MS}_W$가 $(1+n\sigma_a^2/\sigma^2)\,F\big(t-1, t(n-1)\big)$의 분포를 따름을 보여라.

(c) 추정량 $\hat\sigma_a^2 = (\mathrm{MS}_B - \mathrm{MS}_W)/n$은 불편이지만 음수일 수 있다. $t=4$, $n=5$, $\sigma_a^2/\sigma^2 = 0.2$이면 $P(\hat\sigma_a^2 < 0)$을 F 분포의 확률로 쓰고 그 값을 구하라. ($P(F(3,16)<0.5) = 0.312$)

풀이 (a)(b) $\bar y_{i\cdot} = \mu + a_i + \bar\varepsilon_{i\cdot}$들은 독립이고 분산이 $\sigma_a^2 + \sigma^2/n$인 정규다. $\mathrm{SS}_B = n\sum_i(\bar y_{i\cdot}-\bar y)^2$이므로 6회의 Student 정리로 $\mathrm{SS}_B/(n\sigma_a^2+\sigma^2) \sim \chi^2(t-1)$이다. $\mathrm{SS}_W = \sum_{ij}(\varepsilon_{ij}-\bar\varepsilon_{i\cdot})^2$은 a_i를 포함하지 않고, 처치마다 6회의 Student 정리로 $\bar\varepsilon_{i\cdot}$과 독립이며 $\mathrm{SS}_W/\sigma^2 \sim \chi^2(t(n-1))$이다. 따라서 두 제곱합은 독립이고 $E\,\mathrm{MS}_B = \sigma^2 + n\sigma_a^2$, $E\,\mathrm{MS}_W = \sigma^2$이며

$$\frac{\mathrm{MS}_B}{\mathrm{MS}_W} = \Big(1+\frac{n\sigma_a^2}{\sigma^2}\Big)\frac{\mathrm{SS}_B/((\sigma^2+n\sigma_a^2)(t-1))}{\mathrm{SS}_W/(\sigma^2 t(n-1))} \sim \Big(1+\frac{n\sigma_a^2}{\sigma^2}\Big)F\big(t-1,t(n-1)\big).$$

(c) (a)로 $E\hat\sigma_a^2 = \sigma_a^2$이다. $\hat\sigma_a^2 < 0 \iff \mathrm{MS}_B/\mathrm{MS}_W < 1 \iff F < 1/(1+n\sigma_a^2/\sigma^2) = 1/2$이므로 $P = P\big(F(3,16) < 0.5\big) \approx 0.312$이다. 집단 사이의 분산이 있는데도 셋에 하나꼴로 음수 추정이 나온다.

최종답 (c) $P(F(3,16)<0.5) \approx 0.312$

C6 F를 만드는 대비 ★★

정리 4.4, 보조정리 4.3 · 20분

일원배치에서 대비 $\mathbf{c}$ $(\sum_i c_i = 0)$의 t 통계량을 $t_{\mathbf{c}} = \sum_i c_i\bar y_{i\cdot}/(s\sqrt{\sum_i c_i^2/n_i})$라 하자.

(a) $\max_{\mathbf{c}} t_{\mathbf{c}}^2 = \mathrm{SS}_B/s^2 = (t-1)F$이고 최대는 $c_i \propto n_i(\bar y_{i\cdot}-\bar y)$에서 이루어짐을 보여라.

(b) 따라서 F 검정이 기각하는 것과 "어떤 대비의 Scheffé 구간이 0을 포함하지 않는 것"이 같은 사건임을 보여라.

(c) A5의 자료에서 최대를 주는 대비와 $\max t_{\mathbf{c}}^2$을 구하라.

풀이 (a) $\sum c_i = 0$이므로 $\sum_i c_i\bar y_{i\cdot} = \sum_i \frac{c_i}{\sqrt{n_i}}\cdot\sqrt{n_i}(\bar y_{i\cdot}-\bar y)$이고 Cauchy–Schwarz로 $(\sum c_i\bar y_{i\cdot})^2 \le \sum_i \frac{c_i^2}{n_i}\sum_i n_i(\bar y_{i\cdot}-\bar y)^2 = \sum_i \frac{c_i^2}{n_i}\mathrm{SS}_B$이다. 따라서 $t_{\mathbf{c}}^2 \le \mathrm{SS}_B/s^2$이다. 등호는 $c_i/\sqrt{n_i} \propto \sqrt{n_i}(\bar y_{i\cdot}-\bar y)$, 곧 $c_i \propto n_i(\bar y_{i\cdot}-\bar y)$일 때이고, 이 c는 $\sum_i n_i(\bar y_{i\cdot}-\bar y) = 0$이므로 대비다. $\mathrm{SS}_B/s^2 = (t-1)\,\mathrm{MS}_B/s^2 = (t-1)F$이다. (b) Scheffé 구간이 0을 포함하지 않는다 $\iff t_{\mathbf{c}}^2 > (t-1)F_{t-1,\nu,\alpha}$이다. 어떤 대비에서 그렇다 $\iff \max_{\mathbf{c}} t_{\mathbf{c}}^2 = (t-1)F > (t-1)F_{t-1,\nu,\alpha}$ $\iff$ F 검정이 기각한다. (c) $n_i(\bar y_{i\cdot}-\bar y) = 3(-3,0,3)$이므로 대비는 $(-1,0,1)$이다. $\sum c_i\bar y_i = 6$, $s^2 = 4$, $\sum c_i^2/n_i = \frac{2}{3}$이므로 $t^2 = \frac{36}{4\cdot 2/3} = 13.5 = 2F$이다.

최종답 (c) $\max t_{\mathbf{c}}^2 = 13.5$

C7 Bonferroni와 Scheffé의 경계 ★★

명제 4.2, 정리 4.4 · 15분

처치 4개($q = 3$), $\nu = 20$, $\alpha = 0.05$에서 Scheffé의 기준값은 3.049다(A12). 대비 m개를 Bonferroni로 덮을 때의 기준값은 $t_{20,0.05/(2m)}$이고 그 값은 $m = 6, 7, 8, 9$에서 2.927, 2.996, 3.055, 3.107이다.

(a) $m \to \infty$이면 Bonferroni의 기준값이 무한대로 감을 보여라. Scheffé의 기준값은 m과 무관하다.

(b) Bonferroni의 기준값이 Scheffé보다 커지는 가장 작은 m은?

(c) 처치 4개의 짝 비교 전체에는 어느 방법이 좁은가?

풀이 (a) $x_m = t_{\nu,\alpha/(2m)}$이 유계라면 $P(T > x_m) \geq P(T > M) > 0$인 M이 있어 $\alpha/(2m) \to 0$과 모순이다 [T2]. x_m은 m의 증가함수이므로 무한대로 간다. Scheffé의 기준값 $\sqrt{qF_{q,\nu,\alpha}}$에는 m이 들어 있지 않다. (b) $m = 8$에서 $3.055 > 3.049$가 처음이다. (c) 짝은 $\binom{4}{2} = 6$개이므로 Bonferroni의 2.927이 Scheffé의 3.049보다 작다. 짝 비교에서는 Tukey의 $q/\sqrt{2} = 3.958/\sqrt{2} = 2.799$가 그보다 더 작다.

최종답 (b) $m = 8$

C8 짝을 지어 손해 보는 경우 ★

정리 5.1 · 10분

(a) 짝 설계의 상대효율 S^2/S_w^2이 1보다 작을 수 있음을 반례로 보여라.

(b) 짝 $(1,3), (3,1), (2,4), (4,2)$의 상대효율을 구하라.

풀이 (a) (b)의 짝이 반례다. 짝 안의 상관이 음수이면 $S_w^2 \approx S^2(1-\rho) > S^2$이다. (b) 편차의 제곱은 $2.25, 0.25, 0.25, 2.25, 0.25, 2.25, 2.25, 0.25$이고 합이 10이므로 $S^2 = \frac{10}{7}$이다. 짝 안의 차이는 ± 2이므로 $S_w^2 = \frac{16}{8} = 2$이다. 상대효율은 $\frac{10/7}{2} = \frac{5}{7} < 1$이다. 짝을 짓는 것이 오차의 자유도만 쓰고 분산도 늘린다.

최종답 (b) $\frac{5}{7}$

C9 Holm은 Bonferroni보다 약하지 않다 ★

명제 4.2, 연습 8.3 · 10분

m개의 가설에서 Bonferroni($p_i \leq \alpha/m$이면 기각)가 기각하는 가설은 Holm의 단계(노트 연습 8.3)도 모두 기각함을 보여라.

풀이 Bonferroni가 r개를 기각했다면 그것들은 $p_{(1)}, \dots, p_{(r)}$이고 모두 α/m 이하다. $k \leq r$이면 $p_{(k)} \leq \alpha/m \leq \alpha/(m-k+1)$이므로 Holm의 조건이 $k = 1, \dots, r$에서 깨지지 않는다. Holm은 적어도 처음 r개를 기각한다.

D

퀄형

여러 절과 앞 회차의 도구를 잇는 종합 문제다. 머리의 제한 시간을 재고, 노트를 덮고 푼다. 모형을 식으로 적는 것부터 답안의 일부다.

D1 블록을 무시하면 ★★★

정리 2.2, 3.2, 13회 보조정리 3.1 · 제한 40분

처치 3개를 블록 4개에 하나씩 무작위로 배치한 실험의 결과다.

	블록 1	블록 2	블록 3	블록 4
처치 1	10	12	15	19
처치 2	12	15	17	20
처치 3	14	16	19	23

(a) 가법 모형 $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$로 분산분석표를 만들고 처치의 F를 구하라.

(b) 블록을 무시하고 일원분산분석을 하면 처치의 F는 얼마인가?

(c) 블록의 제곱합을 구하고, 두 F가 다른 이유를 정리 3.2의 직교분해로 설명하라.

(d) 가법 모형에서 $E\,\mathrm{MS}_{\text{처치}} = \sigma^2 + \dfrac{b}{t-1}\sum_i \tau_i^2$ ($\sum \tau_i = 0$)임을 증명하라.

풀이 (a) $\mathrm{SS}_{\text{처치}} = 4\big[(14-16)^2 + 0 + (18-16)^2\big] = 32$, $\mathrm{SS}_{\text{블록}} = 3\big[16 + \frac{25}{9} + 1 + \frac{196}{9}\big] = \frac{374}{3}$, $\mathrm{SS}_T = \sum (y - 16)^2 = 158$이므로 $\mathrm{SS}_E = 158 - 32 - \frac{374}{3} = \frac{4}{3}$이다. 자유도는 2, 3, 6이고 $\mathrm{MS}_E = \frac{2}{9}$이므로 $F = \frac{16}{2/9} = 72$이다. (b) 블록을 무시하면 $\mathrm{SS}_W = 158 - 32 = 126$, 자유도 9, $\mathrm{MS}_W = 14$이므로 $F = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \approx 1.14$이다. (c) $\mathrm{SS}_{\text{블록}} = \frac{374}{3} \approx 124.7$이다. 정리 3.2($r = 1$, 가법)로 $\mathbb{R}^{12}$은 상수, 처치, 블록, 나머지의 직교공간으로 나뉜다. 블록을 무시하면 블록 공간의 제곱합이 오차에 섞여 MS가 $\frac{2}{9}$에서 14로 커진다. 처치의 제곱합은 두 분석에서 같다. 균형이어서 처치 공간과 블록 공간이 직교하기 때문이다. (d) 처치 공간의 사영 P는 $\mathbf{y}$를 $\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}$로 보내고 계수는 $t - 1$이다. 13회 보조정리 3.1로 $E\|P\mathbf{y}\|^2 = \|P\boldsymbol{\mu}\|^2 + \sigma^2(t-1)$이고, $\boldsymbol{\mu}$의 처치 조각은 τ_i(블록과 μ는 처치 공간과 직교)이므로 $\|P\boldsymbol{\mu}\|^2 = b\sum_i \tau_i^2$이다. 자유도로 나누면 식이 나온다.

최종답 (a) $F = 72$ (b) $F = \frac{8}{7}$ (c) $\mathrm{SS}_{\text{블록}} = \frac{374}{3}$

D2 여섯 단위의 무작위화 검정과 t ★★★

정리 1.4, 1.7, 연습 1.3 · 제한 40분

단위 6개 가운데 3개를 무작위로 골라 처치했다. 처치군의 결과는 $8, 10, 12$, 대조군은 $5, 6, 9$이다.

(a) 날카로운 귀무가설 아래 $\hat{\tau} = \bar{y}_T - \bar{y}_C$의 무작위화 분포를 모두 열거하고, 한쪽 p-값 $P(\hat{\tau} \ge \hat{\tau}_{\text{관측}})$을 구하라.

(b) Neyman의 분산 추정값 $\hat{V} = s_T^2/3 + s_C^2/3$을 구하라.

(c) $\hat{\tau}/\sqrt{\hat{V}}$를 구하라.

(d) (a)의 p-값이 정확하다는 것의 근거와, (c)를 정규분포나 t 분포와 비교할 때 무엇을 더 가정하는지 설명하라.

풀이 (a) 관측된 $\hat{\tau} = 10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$이다. 귀무가설 아래 6개 값 $\{5,6,8,9,10,12\}$은 고정되고 $\binom{6}{3} = 20$가지 배정이 같은 확률이다. $\hat{\tau} = (2S - 50)/3$ (S는 처치합)이므로 $\hat{\tau} \ge \frac{10}{3} \iff S \ge 30$이다. 합이 30 이상인 부분집합은 $\{8,10,12\} = 30$과 $\{9,10,12\} = 31$의 둘뿐이므로 $p = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$이다. (b) $s_T^2 = \frac{4+0+4}{2} = 4$, $\bar{y}_C = \frac{20}{3}$이고 $s_C^2 = \frac{(25+4+49)/9}{2} = \frac{13}{3}$이다. $\hat{V} = \frac{4}{3} + \frac{13}{9} = \frac{25}{9}$이다. (c) $\frac{10/3}{5/3} = 2$이다. (d) (a)는 정리 1.7로 배정이 실제로 무작위였다는 사실만으로 정확하다. (c)를 $t(4)$와 비교하면 두 군이 정규 모집단에서 왔다는 가정이 더해진다. 작은 표본에서 두 p-값은 다를 수 있다. 여기서 $t(4)$의 한쪽 p-값은 약 0.058이다.

최종답 (a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{25}{9}$ (c) 2

D3 분할구의 세 가지 표준오차 ★★★

명제 3.6, 예제 3.5 · 제한 35분

Yates의 귀리(예제 3.5): 블록 6개, 품종 3개(주구), 질소 4수준(세구)이고 $\text{MS}_{\text{주구 오차}} = 601.3$, $\text{MS}_{\text{세구 오차}} = 177.1$이다. 명제 3.6의 모형을 쓴다.

(a) σ_w^2의 추정값을 구하라.

(b) 두 품종 평균의 차의 표준오차를 구하라.

(c) 두 질소 수준 평균의 차의 표준오차를 구하라.

(d) 같은 품종 안에서 두 질소 수준 평균의 차의 표준오차를 구하라.

각 분산을 모형에서 유도하고, 어느 오차 평균제곱으로 추정하는지 밝혀라.

풀이 (a) $E\,\text{MS}_{\text{주구}} = \sigma^2 + 4\sigma_w^2$, $E\,\text{MS}_{\text{세구}} = \sigma^2$이므로 $\hat{\sigma}_w^2 = (601.3 - 177.1)/4 = 106.05$이다. (b) 품종 평균의 분산은 $\sigma_w^2/6 + \sigma^2/24 = (4\sigma_w^2 + \sigma^2)/24$이고, 두 품종은 다른 주구를 쓰므로 차의 분산은 $2(4\sigma_w^2 + \sigma^2)/24$이다. 주구 오차로 추정하면 $\sqrt{2 \cdot 601.3/24} = 7.08$이다. (c) 질소 평균은 18개 주구에서 세구 하나씩이다. 주구 효과 η는 두 질소 평균에 똑같이 들어가 차에서 지워지므로 분산은 $2\sigma^2/18$이고 $\sqrt{2 \cdot 177.1/18} = 4.44$이다. (d) 같은 품종 안에서는 주구 6개에서 세구 하나씩이고 η가 지워지므로 분산은 $2\sigma^2/6$, 표준오차는 $\sqrt{2 \cdot 177.1/6} = 7.68$이다.

(c)보다 큰 것은 평균에 들어가는 세구가 6개뿐이기 때문이다.

최종답 (a) 106.05 (b) 7.08 (c) 4.44 (d) 7.68

D4 일원분산분석의 가능도비와 Wilks ★★★

정리 2.2, 9회 정리 5.2 · 제한 30분

정규 일원배치에서 σ^2을 모르는 채로 $H_0: \mu_1 = \cdots = \mu_t$를 검정한다.

(a) 가능도비가 $\Lambda = (\mathrm{SS}_W/\mathrm{SS}_T)^{N/2}$이고 $-2\log\Lambda = N\log\!\left(1 + \frac{t-1}{N-t}F\right)$임을 보여라.

(b) $t=3$, $N=12$, $F=4$이면 $-2\log\Lambda$는 얼마인가?

(c) $P\big(F(2,\nu) > f\big) = (1+2f/\nu)^{-\nu/2}$임을 보이고, (b)의 정확한 p-값을 구하라.

(d) Wilks의 근사 $\chi^2(2)$로 구한 p-값을 (c)와 비교하라.

풀이 (a) 평균에 제약이 없으면 $\hat\sigma^2 = \mathrm{SS}_W/N$, 같다는 제약 아래에서는 $\hat\sigma_0^2 = \mathrm{SS}_T/N$이고, 가능도의 최댓값은 $(2\pi\hat\sigma^2)^{-N/2}e^{-N/2}$이다. 따라서 $\Lambda = (\mathrm{SS}_W/\mathrm{SS}_T)^{N/2}$이다. $\mathrm{SS}_T/\mathrm{SS}_W = 1 + \mathrm{SS}_B/\mathrm{SS}_W = 1 + \frac{t-1}{N-t}F$이므로 $-2\log\Lambda = N\log\!\left(1+\frac{t-1}{N-t}F\right)$이다. (b) $12\log\!\left(1+\frac{2}{9}\cdot 4\right) = 12\log\frac{17}{9} \approx 7.632$이다. (c) $F = E/(V/\nu)$, $E\sim\mathrm{Exp}(1)$이 $V\sim\chi^2(\nu)$와 독립이므로 $P(F>f) = E\big[P(E > fV/\nu \mid V)\big] = Ee^{-fV/\nu} = (1+2f/\nu)^{-\nu/2}$이다. 마지막은 $\chi^2(\nu)$의 mgf를 $t=-f/\nu$에서 쓴 것이다. $\nu=9$, $f=4$이면 $(17/9)^{-9/2} = (9/17)^{9/2} \approx 0.0572$이다. (d) $P\big(\chi^2(2) > 12\log\frac{17}{9}\big) = e^{-6\log(17/9)} = (9/17)^6 \approx 0.0220$이다. $N=12$에서는 Wilks의 근사가 p-값을 2.6배 작게 준다. 정확한 F 검정이 있는 문제에서 근사를 쓸 이유가 없다.

최종답 (b) $12\log\frac{17}{9} \approx 7.632$ (c) $(9/17)^{9/2} \approx 0.0572$ (d) $(9/17)^6 \approx 0.0220$