수리통계학 × 통계학의 역사

14회 워크북

분산분석과 실험설계 손으로 푸는 34문항

강의노트 14회를 읽은 뒤 손으로 푼다. 작은 실험의 모든 배정을 직접 세어 보고, 분산분석표를 손으로 채우고, Neyman과 Scheffé의 증명을 빈 종이에 다시 쓴다. 문제 아래의 줄 친 공간에 직접 쓴다.

부	하는 일	문항	예상 시간
A 계산 드릴	배정의 열거, 분산분석표, 비중심도, 기준값을 손으로 계산한다	14	2시간 2분
B 빈칸 증명	노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다	7	2시간 50분
C 증명 문제	변형, 일반화, 반례 만들기	9	2시간 40분
D 퀄형	여러 절을 잇는 종합 문제. 제한 시간 안에	4	2시간 25분
	합계	34	약 10시간

노트 `14_anova_design_notes.pdf` — 문항의 "정리 1.4" 같은 번호는 노트의 번호다

도구 `00_toolkit_notes.pdf` — [T1] 원소 추적, [T2] 귀류·반례, [T4] Cauchy–Schwarz, [T6] 극한과 적분의 교환

검산 노트북 `14_anova_design.ipynb`의 "워크북 검산" 절: `check("A1a", "2/5")`

이 워크북을 쓰는 법

1. **노트를 덮고 푼다.** 문제의 머리 오른쪽에 쓸 도구, 관련 정리 번호, 예상 시간이 있다. 예상 시간의 두 배가 지나도 진척이 없으면 그때 노트를 편다.
2. **막히면 3단으로 본다.** 뒤의 **힌트와 최종답**에서 힌트를 먼저 본다. 다 푼 뒤에는 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나거나 증명이 막히면 풀이판을 본다.
3. **B부는 순서대로 푼다.** 같은 정리를 여러 번 만난다. 처음에는 근거만 빈칸이고(①), 다음에는 단계의 이름만 있고(②), 마지막에는 전략만 있다(③). 앞 단계의 답을 보면서 다음 단계를 쓰지 않는다.
4. **계산은 검산한다.** 최종답이 수나 식인 문항은 노트북의 `check()`에 넣으면 맞는지만 알려 준다. 정답은 보여 주지 않는다. 분위수가 필요한 문항은 문제에 그 값을 적어 두었다. 그 값으로 계산한 소수는 맞다고 본다.
5. **증명은 근거를 단다.** 등호와 부등호마다 어느 정의, 정리, 앞 회차의 결과를 썼는지 오른쪽에 적는다. 노트의 단계형 증명과 같은 모양이다.

표시 ★ 정의를 바로 쓰는 문제, ★★ 두세 단계를 잇는 문제, ★★★ 퀄에 나오는 길이의 문제. [T1]–[T8]은 증명 도구 상자의 도구 번호다.

A

계산 드릴

작은 실험의 배정을 직접 세고, 분산분석표를 손으로 채운다. 답이 수나 식으로 떨어지므로 다 풀면 뒤의 최종답이나 노트북의 `check()`로 맞춰 본다. 계산기는 마지막 나눗셈과 제곱근에만 쓴다.

A1 배정 지시변수의 적률 ★

보조정리 1.3 · 6분

단위 10개 가운데 4개를 처치에 배정하는 완전무작위설계에서 (a) EW_i, (b) $\mathrm{Var}\, W_i$, (c) $i \neq j$ 일 때 $\mathrm{Cov}(W_i, W_j)$를 구하라.

A2 단위 넷의 Neyman 분산 ★★

정리 1.4 · 15분

단위 4개의 잠재적 결과가 다음과 같다. 두 단위를 무작위로 골라 처치한다($n_T = n_C = 2$).

단위	1	2	3	4
$y_i(1)$	5	7	6	10
$y_i(0)$	3	4	6	7

(a) 평균 처치효과 $\bar{\tau}$를 구하라. (b) 정리 1.4로 $\mathrm{Var}\,\hat{\tau}$를 구하라. (c) 6가지 배정을 모두 적어 $\hat{\tau}$의 값들을 구하고 (a)와 (b)를 확인하라.

A3 컵 열 개의 감별 ★

예제 1.8, 정리 1.7 · 6분

컵 10개 가운데 무작위로 고른 5개에 우유를 먼저 붓고, 숙녀에게 그 5개를 고르게 한다. 숙녀가 가리지 못한다면(날카로운 귀무가설) (a) 다섯 개를 모두 맞힐 확률과 (b) 넷 이상 맞힐 확률을 구하라.

A4 다섯 짝의 부호 뒤집기 ★

예제 1.9, 정리 1.7 · 10분

짝 5개의 차이(처치 − 대조)가 $3,\ -1,\ 4,\ 2,\ 5$이다. 짝마다 동전으로 처치를 정했다고 보고, 날카로운 귀무가설 아래 $\sum d_i$의 무작위화 분포로 (a) 한쪽 p-값 $P(\sum \pm|d_i| \geq 13)$과 (b) 양쪽 p-값 $P(|\sum \pm|d_i|| \geq 13)$을 구하라.

A5 일원분산분석표를 손으로 ★

정리 2.2 · 10분

세 처치의 관측값이 A: $4, 6, 8$, B: $7, 9, 11$, C: $10, 12, 14$이다. (a) SS_B, (b) SS_W, (c) F를 구하라.

A6 비중심 χ^2의 적률 ★

정리 2.5 · 6분

$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_3(\boldsymbol{\mu}, I)$이고 $\boldsymbol{\mu} = (1, 2, 2)'$이다. $Q = \|\mathbf{X}\|^2$에 대해 (a) 비중심도 λ, (b) EQ, (c) $\operatorname{Var} Q$를 구하라.

A7 비중심 χ^2의 mgf ★

정리 2.5(b)(c) · 8분

$Q \sim \chi^2(2, \lambda = 2)$이다. (a) $Ee^{Q/4}$를 구하라. (b) 정리 2.5(c)의 혼합 표현에서 Q가 자유도 2인 중심 χ^2에서 나올 확률 $P(J = 0)$을 구하라.

A8 검정력의 비중심도 ★

정리 2.8 · 8분

일원배치에서 처치 3개, 처치마다 5개 단위, 참 평균이 $(10, 12, 14)$, $\sigma = 2$이다. (a) F 검정의 비중심도 λ를 구하라. (b) $\sigma = 4$이면 λ는 얼마인가?

A9 2×2 배치의 다섯 조각 ★★

정리 3.2 · 15분

칸마다 2개씩의 관측이 있다.

	B1	B2
A1	3, 5	6, 8
A2	7, 9	14, 16

(a) SS_A, (b) SS_B, (c) SS_{AB}, (d) SS_E, (e) 상호작용의 F를 구하라.

A10 분할구의 두 오차 ★

명제 3.6 · 8분

주구마다 세구가 3개인 분할구 설계에서 주구 효과의 분산이 $\sigma_w^2 = 2$, 세구 오차의 분산이 $\sigma^2 = 3$이다. (a) $E\,\mathrm{MS}_{\text{주구 오차}}$와 (b) $E\,\mathrm{MS}_{\text{세구 오차}}$를 구하라. (c) 두 품종이 각각 주구 6개(세구 18개)를 받았을 때, 두 품종 평균의 차의 분산을 구하라.

A11 독립인 검정 열 개 ★

명제 4.2 · 6분

참인 귀무가설 10개를 독립인 검정으로 확인한다. (a) 각각을 Bonferroni의 크기 0.005로 하면 FWER은 얼마인가? (b) 각각을 0.05로 하면?

A12 Scheffé와 Tukey의 기준 ★

정리 4.4, 4.6 · 8분

처치 4개, 처치마다 6개, 오차의 평균제곱 $s^2 = 10$, 자유도 $\nu = 20$인 일원배치다. $F_{3,20,0.05} = 3.098$, $q_{4,20,0.05} = 3.958$을 쓴다. (a) 대비 하나의 t 통계량에 대한 Scheffé의 기준값 $\sqrt{qF_{q,\nu,\alpha}}$를 구하라. (b) Tukey의 정직한 유의차 HSD를 구하라.

A13 짝 넷의 효율 ★★

정리 5.1 · 10분

대조 아래의 잠재적 결과가 짝 $(a_i, b_i) = (10, 12),\ (14, 15),\ (8, 7),\ (12, 14)$이다. 처치효과는 상수다. (a) 8개 값의 분산 S^2(분모 7), (b) 짝 안의 분산 $S_w^2 = \frac{1}{2m}\sum(a_i - b_i)^2$, (c) 짝 설계의 상대효율 S^2/S_w^2을 구하라.

A14 공변량 보정과 표본 크기 ★

정리 8.2 · 6분

실험 전 지표와 실험 중 지표의 상관이 $\rho = 0.6$이다. (a) 공변량 보정으로 $\hat{\tau}$의 분산이 몇 배가 되는가? (b) 보정 없이 군마다 1000명이 필요한 정밀도를 보정하면 몇 명으로 얻는가?

B

빈칸 증명

노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다. 같은 정리를 여러 번 만나며 도움이 줄어든다. ① 단계는 주어지고 근거만 빈칸이다. ② 단계의 이름만 주어진다. ③ 전략만 주어진다. 근거에는 정의나 정리의 번호, 앞 회차의 결과, 도구 번호를 쓴다.

B1 Neyman의 분산, 근거 채우기 ★★

① · 정리 1.4 · 15분

완전무작위설계에서 $E\hat{\tau} = \bar{\tau}$이고 $\operatorname{Var}\hat{\tau} = \frac{S_1^2}{n_T} + \frac{S_0^2}{n_C} - \frac{S_\tau^2}{n}$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $a_i = y_i(1)/n_T + y_i(0)/n_C$로 두면 $\hat{\tau} = \sum_i W_i a_i - \sum_i y_i(0)/n_C$이다.

왜? _____

② $\hat{\tau} - \bar{\tau} = \sum_i (W_i - n_T/n) a_i$이다.

왜? _____

③ $E\hat{\tau} = \bar{\tau}$이다.

왜? _____

④ $\operatorname{Var}\hat{\tau} = \frac{n_T n_C}{n^2}\left(\sum_i a_i^2 - \frac{1}{n-1}\sum_{i\neq j} a_i a_j\right)$이다.

왜? _____

⑤ $= \frac{n_T n_C}{n(n-1)} \sum_i (a_i - \bar{a})^2$이다.

왜? _____

⑥ $= \frac{n_C}{n}\frac{S_1^2}{n_T} + \frac{n_T}{n}\frac{S_0^2}{n_C} + \frac{2S_{10}}{n}$이다.

왜? _____

⑦ 정리의 식이 된다.

왜? _____

B2 일원분산분석, 근거 채우기 ★★

① · 정리 2.2 · 20분

일원배치에서 $\mathrm{SS}_T = \mathrm{SS}_B + \mathrm{SS}_W$이고 H_0 아래 $F \sim F(t-1, N-t)$이며 F 검정은 가능도비 검정이다. 근거를 채워라.

① $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\bar{y}_{1\cdot}, \dots, \bar{y}_{t\cdot})'$이고 $(H\mathbf{y})_{ij} = \bar{y}_{i\cdot}$이다. 왜? _____

② $HJ = JH = J$이고 $H-J$, $I-H$는 계수 $t-1$, $N-t$인 대칭 멱등행렬이다. 왜? _____

③ $\mathrm{SS}_T = \mathrm{SS}_B + \mathrm{SS}_W$이다. 왜? _____

④ $I = J + (H-J) + (I-H)$이고 계수의 합이 N이다. 왜? _____

⑤ H_0 아래 $\mathrm{SS}_B/\sigma^2 \sim \chi^2(t-1)$과 $\mathrm{SS}_W/\sigma^2 \sim \chi^2(N-t)$가 독립이다. 왜? _____

⑥ F 검정은 가능도비 검정이다. 왜? _____

B3 Scheffé의 동시구간, 근거 채우기 ★★

① · 정리 4.4 · 15분

모든 $\mathbf{c} \in \mathcal{L} = \{C'\mathbf{a}\}$에 대해 $|\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}| \le \sqrt{qF_{q,n-p,\alpha}}\, s\sqrt{\mathbf{c}'(X'X)^{-1}\mathbf{c}}$일 확률이 $1-\alpha$이다. 근거를 채워라.

① $\mathbf{u} = C(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$, $W = C(X'X)^{-1}C'$로 두면 $\mathbf{c}'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{a}'\mathbf{u}$, $\mathbf{c}'(X'X)^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{a}'W\mathbf{a}$이다. 왜? _____

② W는 양정치다. 왜? _____

③ $\sup_{\mathbf{c}} \dfrac{(\mathbf{c}'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}))^2}{s^2\,\mathbf{c}'(X'X)^{-1}\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{u}'W^{-1}\mathbf{u}}{s^2}$이다. 왜? _____

④ $\mathbf{u}'W^{-1}\mathbf{u}/(qs^2) \sim F(q, n-p)$이다. 왜? _____

⑤ "모든 $\mathbf{c}$가 부등식을 만족한다"의 확률은 $1-\alpha$이다. 왜? _____

B4 Neyman의 분산, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 1.4 · 25분

정리 1.4를 증명하라. 단계의 이름만 주어진다. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① $\hat{\tau}$를 a_i와 W_i로 쓴다

② $\hat{\tau} - \bar{\tau}$를 중심화한 지시변수의 일차결합으로 쓴다

③ 평균을 구한다

④ 공분산 행렬로 분산을 쓴다

⑤ $\sum_i (a_i - \bar{a})^2$을 S_1^2, S_0^2, S_{10}으로 펼친다

⑥ S_{10}을 S_τ^2로 바꾼다

B5 일원분산분석, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 2.2 · 25분

정리 2.2를 증명하라.

① 최소제곱추정량과 $H\mathbf{y}$를 구한다

② $H - J$와 $I - H$가 대칭 멱등임을 보인다

③ **제곱합의 분해**

④ **Cochran의 조건을 확인한다**

⑤ H_0 **아래의 분포**

⑥ **가능도비 검정임을 보인다**

B6 Neyman의 분산, 전략만 ★★

③ · 정리 1.4 · 35분

정리 1.4를 증명하라.

전략 $\hat{\tau}-\bar{\tau}$를 중심화한 배정 지시변수 W_i-n_T/n의 일차결합으로 쓴다. 평균은 0이고, 분산은 보조정리 1.3의 분산과 공분산으로 계산하는 이차형식이다.

B7 Scheffé의 동시구간, 전략만 ★★

③ · 정리 4.4 · 35분

정리 4.4를 증명하라. 보조정리 4.3도 함께 증명하라.

전략 무한히 많은 대비에 대한 부등식을 최댓값 하나에 대한 부등식으로 바꾼다. 그 최댓값은 Cauchy–Schwarz로 계산되고, 참값에서 잰 일반선형가설의 F 통계량이 된다.

C

증명 문제

노트의 정리를 변형하고, 일반화하고, 반례로 경계를 확인한다. 증명은 노트의 단계형 모양으로 쓴다. 한 줄에 한 단계, 줄마다 근거.

C1 Neyman 분산 추정의 치우침 ★★

정리 1.4, 연습 1.3 · 20분

완전무작위설계에서 $\hat{V} = s_T^2/n_T + s_C^2/n_C$로 둔다($s_T^2, s_C^2$는 두 군의 표본분산).

(a) $E\hat{V} - \operatorname{Var}\hat{\tau} = S_\tau^2/n \geq 0$임을 보이고, 등호가 성립할 필요충분조건을 말하라. (노트 연습 1.3의 $Es_T^2 = S_1^2$을 써도 된다.)

(b) A2의 잠재적 결과에서 $E\hat{V}$를 구하고 $\operatorname{Var}\hat{\tau} = \frac{7}{2}$와 비교하라.

C2 무작위화 검정의 정확한 크기 ★★

정리 1.7 · 20분

배정이 M개의 원소를 갖는 $\mathcal{W}$ 위에서 균등하고, 날카로운 귀무가설 아래 $T(w, \mathbf{y})$가 M개의 배정에서 모두 다른 값을 가진다고 하자.

(a) $P\big(p(W) \leq \alpha\big) = \lfloor \alpha M \rfloor / M$임을 보여라.

(b) $M = 70$, $\alpha = 0.05$이면 이 크기는 얼마인가?

(c) 홍차 실험(예제 1.8)의 크기가 (b)보다 작은 $1/70$인 이유를 설명하라.

C3 비중심 χ^2의 단조성, 미분으로 ★★

정리 2.5(a)(e) · 20분

(a) $k=1$이고 $a=\sqrt{\lambda}$이면 $P(\chi^2(1,\lambda)>c)=\Phi(-\sqrt{c}-a)+1-\Phi(\sqrt{c}-a)$임을 보이고, 이것을 a로 미분해 $a\ge 0$에서 증가함을 보여라.

(b) 정리 2.5(a)로 $\chi^2(k,\lambda)$를 $(Z_1+\sqrt{\lambda})^2+V$ ($V\sim\chi^2(k-1)$, Z_1과 독립)로 쓰고, (a)로 일반 k에서 단조성을 다시 증명하라.

(c) $c=1.96^2$, $\lambda=1$이면 $P(\chi^2(1,\lambda)>c)$는 얼마인가? ($\Phi(-2.96)=0.0015$, $\Phi(-0.96)=0.1685$)

C4 처치 제곱합의 짝 표현 ★★

정리 2.2 · 15분

일원배치에서 다음을 보여라.

$$\mathrm{SS}_B = \frac{1}{N}\sum_{i<j} n_i n_j (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot})^2$$

A5의 자료로 확인하라.

C5 임의효과 일원배치 ★★★

명제 3.6, 6회 · 30분

$y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij}$ $(i = 1,\dots,t,\ j = 1,\dots,n)$이고 $a_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma_a^2)$, $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$가 모두 독립이다.

(a) $E\,\mathrm{MS}_W = \sigma^2$, $E\,\mathrm{MS}_B = \sigma^2 + n\sigma_a^2$임을 보여라.

(b) $\mathrm{MS}_B/\mathrm{MS}_W$가 $(1+n\sigma_a^2/\sigma^2)\,F\big(t-1, t(n-1)\big)$의 분포를 따름을 보여라.

(c) 추정량 $\hat{\sigma}_a^2 = (\mathrm{MS}_B - \mathrm{MS}_W)/n$은 불편이지만 음수일 수 있다. $t=4$, $n=5$, $\sigma_a^2/\sigma^2 = 0.2$이면 $P(\hat{\sigma}_a^2 < 0)$을 F 분포의 확률로 쓰고 그 값을 구하라. ($P(F(3,16) < 0.5) = 0.312$)

C6 F를 만드는 대비 ★★

정리 4.4, 보조정리 4.3 · 20분

일원배치에서 대비 $\mathbf{c}$ ($\sum_i c_i = 0$)의 t 통계량을 $t_{\mathbf{c}} = \sum_i c_i \bar{y}_{i\cdot} / (s\sqrt{\sum_i c_i^2/n_i})$라 하자.

(a) $\max_{\mathbf{c}} t_{\mathbf{c}}^2 = \mathrm{SS}_B / s^2 = (t-1)F$이고 최대는 $c_i \propto n_i(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})$에서 이루어짐을 보여라.

(b) 따라서 F 검정이 기각하는 것과 "어떤 대비의 Scheffé 구간이 0을 포함하지 않는 것"이 같은 사건임을 보여라.

(c) A5의 자료에서 최대를 주는 대비와 $\max t_{\mathbf{c}}^2$을 구하라.

C7 Bonferroni와 Scheffé의 경계 ★★

명제 4.2, 정리 4.4 · 15분

처치 4개($q = 3$), $\nu = 20$, $\alpha = 0.05$에서 Scheffé의 기준값은 3.049다(A12). 대비 m개를 Bonferroni로 덮을 때의 기준값은 $t_{20,0.05/(2m)}$이고 그 값은 $m = 6, 7, 8, 9$에서 2.927, 2.996, 3.055, 3.107이다.

(a) $m \to \infty$이면 Bonferroni의 기준값이 무한대로 감을 보여라. Scheffé의 기준값은 m과 무관하다.

(b) Bonferroni의 기준값이 Scheffé보다 커지는 가장 작은 m은?

(c) 처치 4개의 짝 비교 전체에는 어느 방법이 좁은가?

C8 짝을 지어 손해 보는 경우 ★

정리 5.1 · 10분

(a) 짝 설계의 상대효율 S^2/S_w^2이 1보다 작을 수 있음을 반례로 보여라.

(b) 짝 $(1,3), (3,1), (2,4), (4,2)$의 상대효율을 구하라.

C9 Holm은 Bonferroni보다 약하지 않다 ★

명제 4.2, 연습 8.3 · 10분

m개의 가설에서 Bonferroni($p_i \le \alpha/m$이면 기각)가 기각하는 가설은 Holm의 단계(노트 연습 8.3)도 모두 기각함을 보여라.

D

퀄형

여러 절과 앞 회차의 도구를 잇는 종합 문제다. 머리의 제한 시간을 재고, 노트를 덮고 푼다. 모형을 식으로 적는 것부터 답안의 일부다.

D1 블록을 무시하면 ★★★

정리 2.2, 3.2, 13회 보조정리 3.1 · 제한 40분

처치 3개를 블록 4개에 하나씩 무작위로 배치한 실험의 결과다.

	블록 1	블록 2	블록 3	블록 4
처치 1	10	12	15	19
처치 2	12	15	17	20
처치 3	14	16	19	23

(a) 가법 모형 $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$로 분산분석표를 만들고 처치의 F를 구하라.

(b) 블록을 무시하고 일원분산분석을 하면 처치의 F는 얼마인가?

(c) 블록의 제곱합을 구하고, 두 F가 다른 이유를 정리 3.2의 직교분해로 설명하라.

(d) 가법 모형에서 $E\,\mathrm{MS}_{\text{처치}} = \sigma^2 + \dfrac{b}{t-1}\sum_i \tau_i^2$ $(\sum \tau_i = 0)$임을 증명하라.

D2 여섯 단위의 무작위화 검정과 t ★★★ 정리 1.4, 1.7, 연습 1.3 · 제한 40분

단위 6개 가운데 3개를 무작위로 골라 처치했다. 처치군의 결과는 $8, 10, 12$, 대조군은 $5, 6, 9$이다.

(a) 날카로운 귀무가설 아래 $\hat{\tau} = \bar{y}_T - \bar{y}_C$의 무작위화 분포를 모두 열거하고, 한쪽 p-값 $P(\hat{\tau} \geq \hat{\tau}_{\text{관측}})$을 구하라.

(b) Neyman의 분산 추정값 $\hat{V} = s_T^2/3 + s_C^2/3$을 구하라.

(c) $\hat{\tau}/\sqrt{\hat{V}}$를 구하라.

(d) (a)의 p-값이 정확하다는 것의 근거와, (c)를 정규분포나 t 분포와 비교할 때 무엇을 더 가정하는지 설명하라.

D3 분할구의 세 가지 표준오차 ★★★ 명제 3.6, 예제 3.5 · 제한 35분

Yates의 귀리(예제 3.5): 블록 6개, 품종 3개(주구), 질소 4수준(세구)이고 $\mathrm{MS}_{\text{주구 오차}} = 601.3$, $\mathrm{MS}_{\text{세구 오차}} = 177.1$이다. 명제 3.6의 모형을 쓴다.

(a) σ_w^2의 추정값을 구하라.

(b) 두 품종 평균의 차의 표준오차를 구하라.

(c) 두 질소 수준 평균의 차의 표준오차를 구하라.

(d) 같은 품종 안에서 두 질소 수준 평균의 차의 표준오차를 구하라.

각 분산을 모형에서 유도하고, 어느 오차 평균제곱으로 추정하는지 밝혀라.

D4 일원분산분석의 가능도비와 Wilks ★★★

정리 2.2, 9회 정리 5.2 · 제한 30분

정규 일원배치에서 σ^2을 모르는 채로 $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_t$를 검정한다.

(a) 가능도비가 $\Lambda = (\mathrm{SS}_W/\mathrm{SS}_T)^{N/2}$이고 $-2\log\Lambda = N\log\!\left(1 + \frac{t-1}{N-t}F\right)$임을 보여라.

(b) $t = 3$, $N = 12$, $F = 4$이면 $-2\log\Lambda$는 얼마인가?

(c) $P\big(F(2,\nu) > f\big) = (1 + 2f/\nu)^{-\nu/2}$임을 보이고, (b)의 정확한 p-값을 구하라.

(d) Wilks의 근사 $\chi^2(2)$로 구한 p-값을 (c)와 비교하라.

힌트와 최종답

막히면 먼저 힌트를 보고, 다 푼 뒤에 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나면 풀이판을 본다. 최종답은 노트북의 `check()`로도 확인할 수 있다.

A1 힌트 W_i는 0 또는 1이다. 두 단위가 함께 처치에 들어갈 확률은 $\binom{8}{2}/\binom{10}{4}$이다.

답 (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{6}{25}$ (c) $-\frac{2}{75}$

A2 힌트 S_1^2, S_0^2, S_τ^2는 모두 분모 $n-1=3$인 분산이다. $\tau_i = (2,3,0,3)$이다.

답 (a) $\bar{\tau} = 2$ (b) $\frac{7}{2}$

A3 힌트 맞힌 개수 K는 초기하분포를 따른다. $P(K=k) = \binom{5}{k}\binom{5}{5-k}/\binom{10}{5}$이다.

답 (a) $\frac{1}{252}$ (b) $\frac{13}{126} \approx 0.103$

A4 힌트 $|d_i|$는 $1,2,3,4,5$이고 합은 15다. 부호를 바꾼 값들의 합을 s라 하면 $\sum \pm|d_i| = 15 - 2s$이다.

답 (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{1}{8}$

A5 힌트 처치 평균은 6, 9, 12이고 전체 평균은 9다. 처치 안의 편차는 모두 $-2, 0, 2$이다.

답 (a) 54 (b) 24 (c) $\frac{27}{4}$

A6 힌트 정리 2.5(d)를 쓴다.

답 (a) 9 (b) 12 (c) 42

A7 힌트 (a) mgf $(1-2t)^{-k/2}\exp\!\left(\frac{\lambda t}{1-2t}\right)$에 $t=\frac{1}{4}$를 넣는다. (b) $J \sim \mathrm{Poi}(\lambda/2)$이다.

답 (a) $2e \approx 5.437$ (b) $e^{-1} \approx 0.368$

A8 힌트 $\lambda = \sum_i n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2/\sigma^2$이고 $\bar{\mu} = 12$이다.

답 (a) 10 (b) $\frac{5}{2}$

A9 힌트 칸 평균은 4, 7, 8, 15, 전체 평균은 8.5다. 상호작용 조각은 $\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}$이다.

답 (a) 72 (b) 50 (c) 8 (d) 8 (e) 4

A10 힌트 명제 3.6의 4를 세구의 수 3으로 바꾼다. 한 품종 평균의 분산은 $\sigma_w^2/6 + \sigma^2/18$이다.

답 (a) 9 (b) 3 (c) 1

A11 힌트 독립이면 하나도 기각하지 않을 확률은 곱이다.

답 (a) $1-0.995^{10}\approx 0.0489$ (b) $1-0.95^{10}\approx 0.401$

A12 힌트 (a) $q=t-1=3$이다. (b) $\mathrm{HSD}=q_{t,\nu,\alpha}\,s/\sqrt{n}$이다.

답 (a) $\sqrt{3\cdot 3.098}\approx 3.049$ (b) $3.958\sqrt{10/6}\approx 5.11$

A13 힌트 8개 값의 평균은 11.5다. 짝 안의 차이는 $-2,-1,1,-2$이다.

답 (a) $\frac{60}{7}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{48}{7}\approx 6.86$

A14 힌트 분산은 $1-\rho^2$배이고, 같은 분산에 필요한 표본 크기도 같은 배수로 준다.

답 (a) 0.64 (b) 640

B1 힌트 근거는 짧게 쓴다. 예: "보조정리 1.3", "τ_i의 정의". ②는 $\sum_i \frac{n_T}{n}a_i-\sum_i\frac{y_i(0)}{n_C}$을 직접 계산한다.

B2 힌트 ⑤에서는 평균 벡터가 두 사영으로 사라진다는 것과 Cochran의 정리, 두 가지를 함께 쓴다.

B3 힌트 ⑤가 이 증명의 요점이다. 무한히 많은 부등식이 한꺼번에 성립하는 것은 그 가운데 가장 큰 것이 성립하는 것과 같다.

B4 힌트 B1에서 채운 근거를 다시 보지 말고 쓴다. 다섯째 단계에서는 $a_i-\bar a=\frac{y_i(1)-\bar y(1)}{n_T}+\frac{y_i(0)-\bar y(0)}{n_C}$을 제곱해 더한다.

B5 힌트 둘째 단계에서 $(H-J)^2=H-HJ-JH+J=H-J$를 확인한다. $HJ=J$는 $\mathbf{1}\in\mathrm{col}(X)$에서 나온다.

B6 힌트 단계는 여섯이다. 증명을 다 쓴 뒤, 확률이 어디서 왔는지 한 줄로 적어 본다. 정규분포나 표본의 독립을 썼다면 어딘가 틀렸다.

B7 힌트 보조정리 4.3은 $W^{1/2}\mathbf{a}$와 $W^{-1/2}\mathbf{u}$에 Cauchy–Schwarz를 쓴다 [T4]. 등호 조건이 최댓값이 실제로 도달됨을 보여 준다.

C1 힌트 (a) 연습 1.3은 대조군에도 그대로 쓰인다. (b) $S_1^2=\frac{14}{3}$, $S_0^2=\frac{10}{3}$이다.

답 (b) $E\hat V=4$

C2 힌트 값이 모두 다르면 $T(W)$의 순위는 1부터 M까지에서 균등하다. $p(W)$는 $T(W)$ 이상인

값의 개수를 M으로 나눈 것이다.

답 (b) $\frac{3}{70}$

C3 힌트 (a) 도함수는 $\varphi(\sqrt{c}-a)-\varphi(\sqrt{c}+a)$이다. $|\sqrt{c}-a|\le\sqrt{c}+a$이다. (b) V에 조건을 걸면 $P\big((Z_1+a)^2>c-V\mid V\big)$이다.

답 (c) 0.170

C4 힌트 $\sum_{i,j} n_i n_j(\bar y_i-\bar y_j)^2$을 i,j 전체에서 펼치면 $2N\sum_i n_i\bar y_i^2-2(\sum_i n_i\bar y_i)^2$이다.

C5 힌트 (a)(b) 처치 평균 $\bar y_{i\cdot}=\mu+a_i+\bar\varepsilon_{i\cdot}$는 서로 독립이고 $\mathcal{N}(\mu,\sigma_a^2+\sigma^2/n)$이다. SS_W는 $\varepsilon_{ij}-\bar\varepsilon_{i\cdot}$만의 함수다.

답 (c) $P(F(3,16)<0.5)\approx 0.312$

C6 힌트 $\sum_i c_i\bar y_{i\cdot}=\sum_i c_i(\bar y_{i\cdot}-\bar y)=\sum_i(c_i/\sqrt{n_i})\big(\sqrt{n_i}(\bar y_{i\cdot}-\bar y)\big)$에 Cauchy–Schwarz를 쓴다 [T4].

답 (c) $\max t_{\mathbf c}^2=13.5$

C7 힌트 (a) $t_{\nu,\beta}$는 $P(T>x)=\beta$의 해이고, $\beta\to 0$이면 해가 무한대로 가야 한다 [T2].

답 (b) $m=8$

C8 힌트 짝의 두 값이 서로 반대로 움직이면 짝 안의 차이가 커진다. (b) 8개 값의 평균은 2.5다.

답 (b) $\frac{5}{7}$

C9 힌트 Bonferroni가 기각하는 가설은 p-값이 작은 쪽에 몰려 있다. $p_{(k)}\le\alpha/m\le\alpha/(m-k+1)$이다.

D1 힌트 처치 평균 14, 16, 18, 블록 평균 12, $14\frac{1}{3}$, 17, $20\frac{2}{3}$, 전체 평균 16이다. (d)는 처치 공간 위로의 사영 P에 대해 $E\|P\mathbf y\|^2=\|P\boldsymbol\mu\|^2+\sigma^2\operatorname{tr}P$를 쓴다.

답 (a) $F=72$ (b) $F=\frac{8}{7}$ (c) $\mathrm{SS}_{\text{블록}}=\frac{374}{3}$

D2 힌트 여섯 값의 합은 50이므로 $\hat\tau=(2\,\text{처치합}-50)/3$이다. 처치합이 30 이상인 3개짜리 부분집합을 센다.

답 (a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{25}{9}$ (c) 2

D3 힌트 품종 평균은 주구 6개, 세구 24개의 평균이다. 질소 평균은 18개 주구에서 세구를 하나씩 모은 것이어서 주구 효과가 두 평균에 똑같이 들어간다.

답 (a) 106.05 (b) 7.08 (c) 4.44 (d) 7.68

D4 힌트 (a) 정규 가능도의 최댓값은 $(2\pi\hat\sigma^2)^{-N/2}e^{-N/2}$ 이고 $\hat\sigma^2 = \mathrm{RSS}/N$ 이다. (c) $F = \dfrac{E}{V/\nu}$ 로 쓰면 $E = \chi^2(2)/2 \sim \mathrm{Exp}(1)$ 이다. V 에 조건을 걸고 $\chi^2(\nu)$ 의 mgf를 쓴다.

답 (b) $12\log\frac{17}{9} \approx 7.632$ (c) $(9/17)^{9/2} \approx 0.0572$ (d) $(9/17)^6 \approx 0.0220$