수리통계학 × 통계학의 역사

12회 워크북 — 풀이판

최적 검정과 결정
손으로 푸는 34문항

학생판과 같은 문제에 빈칸의 답과 완전한 풀이를 붙였다. 학생판으로 먼저 풀고, 힌트와 최종답으로도 막힐 때 이 판을 본다.

부	하는 일	문항	예상 시간
A 계산 드릴	최강력·UMP 검정의 임계값, 가능도비, SPRT 경계, Bayes 임계값	14	2시간 6분
B 빈칸 증명	노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다	7	2시간 30분
C 증명 문제	변형, 일반화, 반례 만들기	9	2시간 50분
D 퀄형	여러 절을 잇는 종합 문제. 제한 시간 안에	4	2시간 20분
	합계	34	약 10시간

노트 `12_optimal_tests_notes.pdf` — 문항의 "정리 2.4" 같은 번호는 노트의 번호다

도구 `00_toolkit_notes.pdf` — [T1] 지시함수, [T2] 대우·귀류, [T4] 부등식, [T6] 합과 적분의 순서 바꾸기

검산 노트북 `12_optimal_tests.ipynb`의 "워크북 검산" 절: `check("A2b", ` 손으로 구한 답`)`

이 워크북을 쓰는 법

1. **노트를 덮고 푼다.** 문제의 머리 오른쪽에 쓸 도구, 관련 정리 번호, 예상 시간이 있다. 예상 시간의 두 배가 지나도 진척이 없으면 그때 노트를 편다.
2. **막히면 3단으로 본다.** 뒤의 **힌트와 최종답**에서 힌트를 먼저 본다. 다 푼 뒤에는 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나거나 증명이 막히면 풀이판을 본다.
3. **B부는 순서대로 푼다.** 같은 정리를 여러 번 만난다. 처음에는 근거만 빈칸이고(①), 다음에는 단계의 이름만 있고(②), 마지막에는 전략만 있다(③). 앞 단계의 답을 보면서 다음 단계를 쓰지 않는다.
4. **계산은 검산한다.** 최종답이 수나 식인 문항은 노트북의 `check()`에 넣으면 맞는지만 알려 준다. 정답은 보여 주지 않는다. 정규분포표, χ^2 표에서 읽은 값은 유효숫자 셋째 자리까지 맞으면 맞다고 본다.
5. **증명은 근거를 단다.** 등호와 부등호마다 어느 정의, 정리, 앞 회차의 결과를 썼는지 오른쪽에 적는다. 노트의 단계형 증명과 같은 모양이다.

표시 ★ 정의를 바로 쓰는 문제, ★★ 두세 단계를 잇는 문제, ★★★ 퀄에 나오는 길이의 문제. [T1]–[T8]은 증명 도구 상자의 도구 번호다. 표준정규분포의 분포함수를 Φ, 상위 α 분위수를 z_α로 쓴다($z_{0.05} = 1.645$, $z_{0.10} = 1.282$).

A

계산 드릴

최강력 검정과 균일최강력 검정의 임계값, 가능도비 통계량, SPRT의 경계, Bayes 임계값을 손으로 계산한다. 답이 수나 식으로 떨어지므로 다 풀면 뒤의 최종답이나 노트북의 `check()`로 맞춰 본다. 정규분포표와 χ^2 표를 써도 된다.

A1 베르누이의 최강력 검정 ★

정리 1.2 · 10분

$X_1, \dots, X_{10} \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$로 $H_0 : p = 0.2$ 대 $H_1 : p = 0.5$를 크기 0.05로 검정한다. $T = \sum X_i$이다.

(a) 확률화하지 않은 검정 "$T \geq c$이면 기각" 가운데 크기가 0.05 이하인 것으로 가장 작은 c를 구하라.

(b) $T = c - 1$에서 확률 γ로 기각해 크기를 정확히 0.05로 맞추는 γ를 구하라.

(c) (b)의 확률화 검정의 $p = 0.5$에서의 검정력을 구하라.

풀이 가능도비는 $(5/2)^T (5/8)^{10-T} = (5/8)^{10} 4^T$으로 T의 증가함수이므로 최강력 검정은 T가 클 때 기각한다(정리 1.2). (a) H_0 아래 $P(T \geq 5) = 0.0328 \leq 0.05 < P(T \geq 4) = 0.1209$이므로 $c = 5$이다. (b) $\gamma = \dfrac{0.05 - 0.0328}{P(T=4)} = \dfrac{0.0172}{0.0881} = 0.195$. (c) $p = 0.5$에서 $P(T \geq 5) = 0.6230$, $P(T = 4) = \binom{10}{4}/2^{10} = 0.2051$이므로 검정력은 $0.6230 + 0.195 \times 0.2051 = 0.663$이다. 확률화하지 않은 검정($T \geq 5$, 크기 0.033)의 검정력은 0.623이다.

최종답 (a) $c = 5$ (b) $\gamma \approx 0.195$ (c) ≈ 0.663

A2 지수분포 관측 하나 ★

정리 1.2 · 8분

X의 밀도가 $\theta e^{-\theta x}$ $(x > 0)$이다. 관측 하나로 $H_0 : \theta = 1$ 대 $H_1 : \theta = 3$을 크기 0.1로 검정한다. (a) 최강력 검정의 기각역이 $\{X < c\}$임을 보이고 c를 구하라. (b) 검정력을 구하라.

풀이 (a) $f_1/f_0 = 3e^{-2x}$는 x의 감소함수이므로 $\{f_1 > k f_0\} = \{x < c\}$ 꼴이다. $P_1(X < c) = 1 - e^{-c} = 0.1$에서 $c = \log \dfrac{10}{9} \approx 0.105$이다. (b) $P_3(X < c) = 1 - e^{-3c} = 1 - 0.9^3 = 0.271$이다. 대립가설의 평균$(\frac{1}{3})$이 귀무가설의 평균(1)보다 작으므로 작은 값에서 기각하는 것이 맞다.

최종답 (a) $c = \log \dfrac{10}{9} \approx 0.105$ (b) 0.271

A3 Poisson 관측 하나 ★★

정리 1.2 · 10분

$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ 하나로 $H_0 : \lambda = 2$ 대 $H_1 : \lambda = 5$를 크기 0.05로 검정한다.

(a) 확률화하지 않은 검정 "$X \geq c$이면 기각" 가운데 크기가 0.05 이하인 가장 작은 c와 (b) 그 크기를 구하라.

(c) 크기를 정확히 0.05로 맞추는 확률화 상수 γ ($X = c-1$에서)를 구하라.

(d) 확률화 검정의 $\lambda = 5$에서의 검정력을 구하라.

풀이 가능도비 $e^{-3}(5/2)^X$는 X의 증가함수이므로 큰 X에서 기각한다. (a)(b) $P_2(X \geq 5) = 0.0527 > 0.05$, $P_2(X \geq 6) = 1 - e^{-2}\sum_{k\leq 5} 2^k/k! = 0.0166$이므로 $c = 6$이고 크기는 0.0166이다. (c) $P_2(X = 5) = 0.0361$이므로 $\gamma = \frac{0.05 - 0.0166}{0.0361} = 0.926$이다. (d) $\lambda = 5$에서 $P(X \geq 6) = 0.3840$, $P(X = 5) = 0.1755$이므로 검정력은 $0.3840 + 0.926 \times 0.1755 = 0.547$이다. 확률화하지 않으면 0.384에 그친다. 이산분포에서 크기를 다 쓰지 못하는 손실이 크다.

최종답 (a) $c = 6$ (b) ≈ 0.0166 (c) $\gamma \approx 0.926$ (d) ≈ 0.547

A4 검정력을 위한 표본 크기 ★

정리 2.4 · 8분

$X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 4)$로 $H_0 : \mu \leq 0$ 대 $H_1 : \mu > 0$을 크기 0.05의 UMP 검정으로 검정한다. $\mu = 1$에서 검정력이 0.9 이상이 되는 가장 작은 n을 구하라.

풀이 $\mathcal{N}(\mu, 4)$는 $\sum X_i$에 대해 단조가능도비를 가지므로 정리 2.4로 UMP 검정은 $\bar{X} > c$, $c = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$이다. $\mu = 1$에서 검정력은 $P\big(Z > \frac{c-1}{2/\sqrt{n}}\big) = P\big(Z > 1.645 - \frac{\sqrt{n}}{2}\big)$이고, 이것이 0.9 이상이려면 $1.645 - \frac{\sqrt{n}}{2} \leq -1.282$, 곧 $\sqrt{n} \geq 5.853$, $n \geq 34.26$이다. 따라서 $n = 35$이다.

최종답 $n = 35$

A5 베타형 밀도의 UMP ★

정의 2.2, 정리 2.4 · 10분

X의 밀도가 $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$ $(0 < x < 1, \theta > 0)$이다. 관측 하나로 검정한다.

(a) 이 족이 x에 대해 단조가능도비를 가짐을 보여라.

(b) $H_0 : \theta \leq 1$ 대 $H_1 : \theta > 1$의 크기 0.05 UMP 검정 "$X > c$이면 기각"의 c를 구하라.

(c) $\theta = 2$에서의 검정력을 구하라.

풀이 (a) $\theta_1 < \theta_2$이면 $\frac{f(x;\theta_2)}{f(x;\theta_1)} = \frac{\theta_2}{\theta_1} x^{\theta_2 - \theta_1}$이고 지수가 양수이므로 x의 증가함수다. (b) 정리 2.4로 UMP 검정은 $X > c$이고, 경계 $\theta = 1$에서 $X \sim \mathrm{U}(0,1)$이므로 $1 - c = 0.05$, $c = 0.95$이다. (c) $P_2(X > 0.95) = 1 - 0.95^2 = 0.0975$이다. 관측 하나로는 검정력이 낮다.

최종답 (b) $c = 0.95$ (c) 0.0975

A6 지수 평균의 한쪽 검정 ★★

정리 2.4 · 10분

$X_1, \dots, X_{10} \overset{\text{iid}}{\sim}$ 지수분포(평균 θ)로 $H_0 : \theta \le 2$ 대 $H_1 : \theta > 2$를 크기 0.05로 검정한다. (a) UMP 검정 "$\sum X_i > c$이면 기각"의 c를 χ^2 분포의 분위수로 구하라. (b) $\theta = 4$에서의 검정력을 구하라.

풀이 지수분포(평균 θ)는 $c(\theta) = -1/\theta$가 증가하는 1-모수 지수족이므로 $\sum X_i$에 대해 단조 가능도비를 갖고, 정리 2.4로 UMP 검정은 $\sum X_i > c$이다. (a) $\theta = 2$에서 $\sum X_i = \frac{2}{2}\sum X_i \sim \chi^2(20)$이므로 $c = \chi^2_{20,\,0.05} = 31.41$이다. (b) $\theta = 4$이면 $\frac{2}{4}\sum X_i \sim \chi^2(20)$이므로 검정력은 $P\big(\chi^2(20) > 31.41/2\big) = P(\chi^2(20) > 15.71) = 0.735$이다.

최종답 (a) $c = \chi^2_{20,\,0.05} \approx 31.41$ (b) ≈ 0.735

A7 정규 평균의 가능도비 ★

정의 3.1 · 6분

$X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 1)$, $n = 16$, $\bar{x} = 0.6$이다. $H_0 : \mu = 0$ 대 $H_1 : \mu \neq 0$의 (a) $-2\log\lambda$를 구하고, (b) $\chi^2(1)$로 읽은 p-값을 구하라. 양쪽 z 검정의 p-값과 비교하라.

풀이 (a) $\log L(\mu) = -\frac{n}{2}(\bar{x}-\mu)^2 + (\mu$와 무관한 항$)$이므로 $-2\log\lambda = 2\big[\log L(\bar{x}) - \log L(0)\big] = n\bar{x}^2 = 16 \times 0.36 = 5.76$. (b) $P(\chi^2(1) > 5.76) = 0.0164$이다. $z = \sqrt{n}\bar{x} = 2.4$이고 양쪽 p-값 $2\Phi(-2.4) = 0.0164$와 같다. $Z^2 \sim \chi^2(1)$이므로 이 경우 가능도비 검정은 양쪽 z 검정 그 자체다.

최종답 (a) 5.76 (b) ≈ 0.0164

A8 이항 비율의 가능도비 ★

정의 3.1 · 8분

$X \sim \mathrm{b}(100, p)$에서 $x = 60$을 관측했다. $H_0 : p = 0.5$의 가능도비 통계량 $-2\log\lambda$를 구하라.

풀이 $\hat{p} = 0.6$에서 가능도가 최대이므로 $-2\log\lambda = 2\big[60\log\frac{0.6}{0.5} + 40\log\frac{0.4}{0.5}\big] = 2(10.939 - 8.926) = 4.03$이다. $\chi^2(1)$로 읽은 p-값은 0.045이고, 같은 자료의 $z^2 = \frac{(0.6-0.5)^2}{0.25/100} = 4.00$과 가깝다.

최종답 ≈ 4.03

A9 Wald의 경계 ★

정리 4.2 · 6분

SPRT의 목표 오류율을 $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$로 둔다. (a) 위 경계 A, (b) 아래 경계 B를 구하고, (c) 실제 1종 오류율 α'의 상한을 정리 4.2로 구하라.

풀이 (a) $A = \log\frac{0.95}{0.01} = \log 95 = 4.554$. (b) $B = \log\frac{0.05}{0.99} = \log\frac{5}{99} = -2.986$. (c) $\alpha' \le \frac{0.01}{0.95} = \frac{1}{95} = 0.0105$이다. 목표보다 5% 큰 정도의 상한이고, 넘침을 무시한 경계이므로 실제로는

목표보다 작은 경우가 많다.

최종답 (a) $A=\log 95\approx 4.554$ (b) $B=\log\frac{5}{99}\approx -2.986$ (c) $\alpha'\le\frac{1}{95}\approx 0.0105$

A10 정규 SPRT의 평균 표본수 ★★

정리 4.2, 보조정리 4.3 · 12분

$X_i\overset{\text{iid}}{\sim}\mathcal{N}(\mu,1)$로 $H_0:\mu=0$ 대 $H_1:\mu=0.5$를 $\alpha=\beta=0.05$의 SPRT로 검정한다. $Z=\log\frac{f_1(X)}{f_0(X)}$이다. (a) E_0Z를 구하라. (b) 넘침을 무시한 Wald의 근사로 E_0N을 구하라. (c) 같은 α,β를 내는 고정 표본의 한쪽 z 검정에 필요한 가장 작은 n을 구하라.

풀이 (a) $Z=0.5X-0.125$이므로 $E_0Z=-0.125=-\frac{1}{8}$. (b) $A=\log 19$, $B=-\log 19$이므로 $E_0N\approx\frac{0.95(-\log 19)+0.05\log 19}{-1/8}=7.2\log 19=21.2$이다(보조정리 4.3에 $\Lambda_N\approx A$ 또는 B를 넣은 것). (c) 크기 0.05의 기각역 $\bar X>1.645/\sqrt{n}$의 $\mu=0.5$에서의 검정력이 0.95 이상이려면 $0.5\sqrt{n}\ge 3.290$, $n\ge 43.3$이므로 $n=44$이다. SPRT는 H_0 아래 평균적으로 그 절반 정도로 끝난다.

최종답 (a) $E_0Z=-\frac{1}{8}$ (b) ≈ 21.2 (c) $n=44$

A11 비용이 다른 Bayes 검정 ★

따름정리 5.3 · 8분

관측 하나 x로 $H_0:\mathcal{N}(0,1)$ 대 $H_1:\mathcal{N}(1,1)$을 결정한다. 사전확률은 $\pi_0=0.9$, $\pi_1=0.1$이고, 1종 오류의 비용은 1, 2종 오류의 비용은 4이다. (a) 가능도비 임계값 k와 (b) x의 기각 경계를 구하라.

풀이 (a) $k=\frac{0.9\cdot 1}{0.1\cdot 4}=\frac{9}{4}$. (b) $e^{x-1/2}>\frac{9}{4}$, 곧 $x>\frac{1}{2}+\log\frac{9}{4}=1.311$이면 기각한다. 비용만 보면 2종 오류가 네 배 비싸지만, H_1의 사전확률이 작아 임계값은 1보다 크다.

최종답 (a) $k=\frac{9}{4}$ (b) $x>\frac{1}{2}+\log\frac{9}{4}\approx 1.311$

A12 두 무리의 선형판별 ★★

따름정리 5.5 · 12분

$\boldsymbol{\mu}_0=(0,0)$, $\boldsymbol{\mu}_1=(2,1)$, $\Sigma=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $\pi_0=\pi_1$이다. (a)(b) 판별 방향 $\mathbf{w}=\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_0)$의 두 성분, (c) Mahalanobis 거리 Δ, (d) 오분류 확률을 구하라.

풀이 $\Sigma^{-1}=\frac{4}{3}\left(\begin{smallmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & 1\end{smallmatrix}\right)$이므로 (a)(b) $\mathbf{w}=\frac{4}{3}(2-0.5,\ -1+1)=(2,0)$이다. 두 번째 측정값은 판별에 쓰이지 않는다. 첫째와의 상관 때문에 둘째의 차이 1이 첫째의 차이로 이미 설명되기 때문이다. (c) $\Delta^2=(2,1)\cdot(2,0)=4$, $\Delta=2$. (d) $\Phi(-\Delta/2)=\Phi(-1)=0.159$이다.

최종답 (a) $w_1=2$ (b) $w_2=0$ (c) $\Delta=2$ (d) $\Phi(-1)\approx 0.159$

A13 정규 점수의 ROC ★

8.1절 · 8분

음성의 점수가 $\mathcal{N}(0,1)$, 양성의 점수가 $\mathcal{N}(1,1)$이다. (a) 거짓양성률 0.05에서의 참양성률과 (b) ROC 곡선 아래 넓이를 구하라.

풀이 (a) 임계값은 $z_{0.05} = 1.645$이므로 참양성률은 $P(\mathcal{N}(1,1) > 1.645) = \Phi(-0.645) = 0.260$이다. (b) $S_1 - S_0 \sim \mathcal{N}(1,2)$이므로 $\text{AUC} = P(S_1 - S_0 > 0) = \Phi(1/\sqrt{2}) = 0.760$이다. 두 정규의 가능도비 $e^{s-1/2}$는 s의 증가함수이므로 이 점수 자체가 최강력 검정을 준다.

최종답 (a) ≈ 0.260 (b) $\Phi(1/\sqrt{2}) \approx 0.760$

A14 Lindley의 역설, 숫자로 ★★

예제 7.2 · 10분

$X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu,1)$, $n = 400$에서 $z = \sqrt{n}\bar{x} = 2.5$가 나왔다. H_1 아래 $\mu \sim \mathcal{N}(0,1)$로 둔다. (a) 양쪽 p-값, (b) Bayes 인수 B_{01}, (c) 두 가설의 사전확률이 같을 때 $P(H_0 \mid \mathbf{x})$를 구하라.

풀이 (a) $2\Phi(-2.5) = 0.0124$. (b) $B_{01} = \sqrt{401}\exp\!\left(-3.125 \cdot \frac{400}{401}\right) = 20.02 \times 0.0443 = 0.887$. (c) $P(H_0 \mid \mathbf{x}) = \frac{0.887}{1.887} = 0.470$이다. $p = 0.012$는 크기 0.05에서 기각이지만, 이 사전분포 아래에서는 H_0의 사후확률이 절반에 가깝다.

최종답 (a) ≈ 0.0124 (b) $B_{01} \approx 0.887$ (c) ≈ 0.470

B

빈칸 증명

노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다. 같은 정리를 여러 번 만나며 도움이 줄어든다. ① 단계는 주어지고 근거만 빈칸이다. ② 단계의 이름만 주어진다. ③ 전략만 주어진다. 근거에는 정의나 정리의 번호, 앞 회차의 결과, 도구 번호를 쓴다.

B1 Neyman–Pearson의 (b)(c), 근거 채우기 ★★

① · 정리 1.2 · 15분

φ^*는 $f_1 > kf_0$에서 1, $f_1 < kf_0$에서 0인 검정이고 $k \geq 0$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① 크기가 $E_{\theta_0}\varphi^*$ 이하인 검정 φ에 대해, 모든 $\mathbf{x}$에서 $(\varphi^* - \varphi)(f_1 - kf_0) \geq 0$이다.

근거: φ^*의 정의, $0 \leq \varphi \leq 1$

② 적분한다.

$$0 \leq \int (\varphi^* - \varphi)(f_1 - kf_0)\, d\mathbf{x} \qquad \text{근거: ①, 적분의 단조성}$$

$$= (E_{\theta_1}\varphi^* - E_{\theta_1}\varphi) - k(E_{\theta_0}\varphi^* - E_{\theta_0}\varphi) \qquad \text{근거: 적분의 선형성}$$

③ $E_{\theta_1}\varphi^* - E_{\theta_1}\varphi \geq k(E_{\theta_0}\varphi^* - E_{\theta_0}\varphi) \geq 0$이다. 근거: $k \geq 0$, 크기의 가정

④ φ도 크기 α의 최강력 검정이면 ②의 적분은 정확히 0이다. 근거: 최강력의 정의, ②

⑤ $f_1 \neq kf_0$인 곳에서는 거의 어디서나 $\varphi = \varphi^*$이다. 근거: 음이 아닌 함수의 적분이 0

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 정리 1.2의 단계 ④–⑧과 같다. ②에서 적분을 두 기댓값의 차로 나눌 수 있는 것은 $|(\varphi^* - \varphi)(f_1 - kf_0)| \leq f_1 + kf_0$가 적분가능하기 때문이다. ④에서는 $E_{\theta_1}\varphi = E_{\theta_1}\varphi^*$이고 $E_{\theta_0}\varphi \leq \alpha = E_{\theta_0}\varphi^*$이므로 ②의 오른쪽이 0 이하가 되고, 왼쪽이 0 이상이므로 0이다.

B2 Karlin–Rubin, 근거 채우기 ★★

① · 정리 2.4 · 15분

분포족이 T에 대해 단조가능도비를 갖고, φ^*는 $T>c$에서 1, $T<c$에서 0, $E_{\theta_0}\varphi^*=\alpha$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $\theta'<\theta''$이면 $f(\mathbf{x};\theta'')/f(\mathbf{x};\theta')=g(T(\mathbf{x}))$, g는 감소하지 않는다. $k=g(c)$로 둔다. — 정의 2.2

② $f''>kf'$이면 $T>c$이므로 $\varphi^*=1$이고, $f''<kf'$이면 $T<c$이므로 $\varphi^*=0$이다. — g의 단조성, 대우 [T2]

③ φ^*는 θ' 대 θ''의 자기 크기 최강력 검정이다. — 정리 1.2(b)

④ $E_{\theta''}\varphi^*\geq E_{\theta'}\varphi^*$이다. — 따름정리 1.5(b)

⑤ $\sup_{\theta\leq\theta_0}E_\theta\varphi^*=E_{\theta_0}\varphi^*=\alpha$이다. — ④: 검정력의 단조성

⑥ $\theta_1>\theta_0$이고 φ의 크기가 α 이하이면 $E_{\theta_0}\varphi\leq\alpha$이다. — 크기의 정의

⑦ $E_{\theta_1}\varphi^*\geq E_{\theta_1}\varphi$이고, θ_1이 아무것이므로 UMP다. — ③을 θ_0 대 θ_1에

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 정리 2.4의 증명과 같다. ②에서 $g(T)>g(c)$이면 $T>c$인 것은 대우로 보인다. $T\leq c$이면 g가 감소하지 않으므로 $g(T)\leq g(c)$이다.

B3 Wald의 등식, 근거 채우기 ★★

① · 보조정리 4.3 · 15분

$Z_1,Z_2,\ldots$가 iid, $E|Z_1|<\infty$, N이 멈춤시각, $EN<\infty$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $\sum_{i=1}^{N}Z_i=\sum_{i=1}^{\infty}Z_i\,1\{N\geq i\}$이다. — 지시함수 [T1]

② $\{N\geq i\}$는 $Z_1,\ldots,Z_{i-1}$로 정해지므로 Z_i와 독립이다. — 멈춤시각의 정의, iid

③ $E\big[Z_i1\{N\geq i\}\big]=EZ_1\,P(N\geq i)$이다. — 2회 정리 2.7

④ $E\sum_{i\leq N}Z_i=\sum_i EZ_1\,P(N\geq i)=EZ_1\cdot EN$이다. — 합과 기댓값의 교환, 2회 정리 1.13

조건 확인: ④의 첫 등호에서 합과 기댓값의 순서를 바꿀 수 있는 이유를 쓰라.

$\sum_i E|Z_i|1\{N\geq i\}=E|Z_1|\,EN<\infty$이므로 Fubini [T6]

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 보조정리 4.3의 증명과 같다. 조건 확인은 ①–③을 $|Z_i|$에 그대로 써서 $\sum_i E\big[|Z_i|1\{N\geq i\}\big]=E|Z_1|\,EN<\infty$를 얻고, 그래서 Fubini–Tonelli로 합과 기댓값을 바꿀 수 있다는 것이다.

B4 Neyman–Pearson, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 1.2 · 25분

정리 1.2의 (a)(b)(c)를 증명하라. 단계의 이름만 주어진다. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① **(a) 가능도비의 생존함수 $F(k)$를 정의하고 성질을 적는다**

② **임계값 k를 고른다**

③ **경계에서 확률화해 크기를 맞춘다**

④ **(b) 모든 점에서 성립하는 부등식**

⑤ **적분한다**

⑥ **결론**

⑦ **(c) 적분이 0이 되는 이유**

⑧ **거의 어디서나의 결론**

풀이

① $F(k) = P_{\theta_0}(f_1 > kf_0)$은 감소하고 오른쪽 연속이며 $k \to \infty$에서 0으로 간다. — 1회 정리 4.7

② $k = \inf\{t \geq 0 : F(t) \leq \alpha\}$이면 $F(k) \leq \alpha \leq F(k-)$. — ①

③ $\gamma = \frac{\alpha - F(k)}{F(k-) - F(k)}$로 두면 크기가 α. — $P_0(f_1 = kf_0) = F(k-) - F(k)$

④ $(\varphi^* - \varphi)(f_1 - kf_0) \geq 0$. — 세 경우

⑤ 적분하면 $(E_1\varphi^* - E_1\varphi) - k(E_0\varphi^* - E_0\varphi) \geq 0$. — 적분의 단조성·선형성

⑥ $E_1\varphi^* - E_1\varphi \geq k(E_0\varphi^* - E_0\varphi) \geq 0$. — $k \geq 0$

⑦ φ도 최강력이면 적분은 0. — ⑤

⑧ $f_1 \neq kf_0$에서 $\varphi = \varphi^*$ (거의 어디서나). — 음이 아닌 함수

B5 Karlin–Rubin, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 2.4 · 25분

정리 2.4를 증명하라. 단계의 이름만 주어진다.

① **두 모수값을 고정하고 단조가능도비를 쓴다**

② **기각역이 가능도비의 위쪽 집합임을 보인다**

③ **그래서 Neyman–Pearson 검정이다**

④ **검정력 함수의 단조성**

⑤ **크기**

⑥ **비교할 검정을 고른다**

⑦ **균일최강력의 결론**

풀이 노트 정리 2.4의 단계형 증명과 같다. 단계별 근거는 B2의 풀이를 본다. 가능도비가 ∞인 점($f' = 0 < f''$)은 $\{f'' > kf'\}$에 들어가므로 따로 다룰 필요가 없다.

B6 Neyman–Pearson, 전략만 ★★

③ · 정리 1.2 · 30분

정리 1.2의 (a)(b)(c)를 증명하라.

전략 (a)는 가능도비의 생존함수에서 임계값을 고르고 경계에서 확률화한다. (b)는 모든 점에서 성립하는 부등식 하나를 적분한다. (c)는 그 부등식이 등호가 되는 조건을 읽는다.

풀이 B4의 풀이와 같다. 확률화가 필요한 것은 (a)뿐이다. (b)와 (c)는 경계 $\{f_1 = kf_0\}$ 위에서 φ^*의 값을 쓰지 않으므로, 경계에서의 값이 무엇이든 성립한다.

B7 Wald의 등식, 전략만 ★★

③ · 보조정리 4.3 · 25분

보조정리 4.3을 증명하라. 그리고 N이 멈춤시각이 아니면 몇 번째 단계가 무너지는지 밝혀라.

전략 무작위 개수의 합을 지시함수로 고정된 무한합으로 바꾼다. 멈춤시각이라는 조건이 각 항의 두 인수를 독립으로 만든다.

풀이 B3의 풀이와 같다. N이 멈춤시각이 아니면 ②가 무너진다. 예를 들어 다음 관측 Z_i를 엿보고 멈추면 $\{N \geq i\}$가 Z_i에 의존하므로 $E[Z_i 1\{N \geq i\}] \neq EZ_1 P(N \geq i)$일 수 있다(노트 연습 4.1).

C

증명 문제

노트의 정리를 변형하고, 일반화하고, 반례로 경계를 확인한다. 증명은 노트의 단계형 모양으로 쓴다. 한 줄에 한 단계, 줄마다 근거.

C1 하나의 검정이 여러 대립가설에 최강력 ★★

[T2] · 정리 1.2 · 15분

φ^*가 f_0 대 f_1의 크기 α Neyman–Pearson 검정(임계값 $k>0$)이다. 다른 밀도 f_2가 있어 $f_0>0$인 곳에서 $f_2(\mathbf{x})/f_0(\mathbf{x})=\psi\big(f_1(\mathbf{x})/f_0(\mathbf{x})\big)$이고 ψ가 순증가함수이다.

(a) $\{f_1>kf_0\}=\{f_2>\psi(k)f_0\}$, $\{f_1<kf_0\}=\{f_2<\psi(k)f_0\}$임을 보여라.

(b) φ^*가 f_0 대 f_2의 크기 α 최강력 검정임을 보여라.

(c) 이것이 정리 2.4의 증명의 어느 단계와 같은 생각인지 밝혀라.

풀이 (a) ψ가 순증가이므로 $r>k \iff \psi(r)>\psi(k)$이고 $r<k \iff \psi(r)<\psi(k)$이다. $r=f_1/f_0$, $\psi(r)=f_2/f_0$을 넣고 양변에 $f_0>0$을 곱하면 두 등식이 나온다. (b) (a)로 φ^*는 $f_2>\psi(k)f_0$에서 1, $f_2<\psi(k)f_0$에서 0이므로 임계값 $\psi(k)$의 Neyman–Pearson 꼴이다. 크기는 f_0에만 의존하므로 그대로 α이고, 정리 1.2(b)로 f_0 대 f_2의 크기 α 최강력 검정이다. ($f_0=0$이고 $f_2>0$인 점에서는 φ^*를 1로 두면 크기를 바꾸지 않고 정리 1.2(b)의 부등식이 성립한다.) (c) 정리 2.4의 단계 ①–③이 같은 생각이다. 거기서는 $f(\mathbf{x};\theta'')/f(\mathbf{x};\theta')$가 T의 감소하지 않는 함수였고, 그래서 "$T>c$" 하나가 모든 $\theta''>\theta'$에 대해 Neyman–Pearson 꼴이 되었다.

C2 단조가능도비와 기댓값의 단조성 ★★

[T2] · 정의 2.2 · 20분

분포족이 T에 대해 단조가능도비를 갖고, ψ가 감소하지 않는 함수이며 $E_\theta|\psi(T)|<\infty$이다. $\theta_1<\theta_2$이면 $E_{\theta_1}\psi(T)\le E_{\theta_2}\psi(T)$임을 보여라. $f_j=f(\cdot;\theta_j)$로 쓴다.

(a) $A=\{f_2>f_1\}$, $B=\{f_2<f_1\}$이면 $\mathbf{x}\in A$, $\mathbf{y}\in B$에 대해 $T(\mathbf{x})>T(\mathbf{y})$임을 보여라.

(b) $a=\inf_A\psi(T)$, $b=\sup_B\psi(T)$로 두면 $a\ge b$이고, $D=\int_A(f_2-f_1)=\int_B(f_1-f_2)$임을 보여라.

(c) $E_{\theta_2}\psi(T)-E_{\theta_1}\psi(T)\ge(a-b)D\ge 0$을 보여라.

풀이 (a) $\mathbf{x}\in A$이면 $g(T(\mathbf{x}))=f_2(\mathbf{x})/f_1(\mathbf{x})>1$이고 $\mathbf{y}\in B$이면 $g(T(\mathbf{y}))<1$이므로 $g(T(\mathbf{x}))>g(T(\mathbf{y}))$이다. $T(\mathbf{x})\le T(\mathbf{y})$이면 g가 감소하지 않으므로 $g(T(\mathbf{x}))\le g(T(\mathbf{y}))$가

되어 모순이다. ($f_1 = 0 < f_2$인 점은 가능도비가 ∞이므로 A에 들어가고 논리가 같다.) (b) (a)와 ψ가 감소하지 않음에서 $\psi(T(\mathbf{x})) \geq \psi(T(\mathbf{y}))$이므로 $a \geq b$이다. $\int(f_2 - f_1) = 1 - 1 = 0$이고 $\{f_2 = f_1\}$ 위에서는 피적분함수가 0이므로 $\int_A(f_2 - f_1) = \int_B(f_1 - f_2) = D$이다. (c) $E_{\theta_2}\psi - E_{\theta_1}\psi = \int_A \psi(T)(f_2 - f_1) + \int_B \psi(T)(f_2 - f_1) \geq a\int_A(f_2 - f_1) - b\int_B(f_1 - f_2) = (a-b)D \geq 0$이다. 첫 적분에서 $f_2 - f_1 > 0$, $\psi \geq a$를, 둘째에서 $f_2 - f_1 < 0$, $\psi \leq b$를 썼다. $\psi = 1\{T > c\}$로 두면 정리 2.4의 "검정력 함수는 감소하지 않는다"가 이 명제의 특수한 경우다.

C3 균등분포에는 양쪽 UMP가 있다 ★★★

[T2] · 정리 1.2 · 25분

$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0, \theta)$로 $H_0 : \theta = 1$ 대 $H_1 : \theta \neq 1$을 검정한다. 검정 φ는 $X_{(n)} > 1$이거나 $X_{(n)} \leq \alpha^{1/n}$이면 기각한다.

(a) φ의 크기가 α임을 보여라.

(b) $\theta > 1$이면 검정력이 $1 - (1-\alpha)\theta^{-n}$이고, 이것이 1 대 θ의 크기 α 최강력 검정의 검정력과 같음을 보여라.

(c) $\theta < 1$이면 크기 α인 어떤 검정의 검정력도 $\min(1, \alpha\theta^{-n})$을 넘지 못함을 보이고, φ가 그 값을 얻음을 보여라.

(d) φ가 UMP임을 결론짓고, $n = 5$, $\alpha = 0.05$, $\theta = 0.8$에서의 검정력을 구하라.

풀이 (a) $\theta = 1$이면 $P(X_{(n)} > 1) = 0$이고 $P(X_{(n)} \leq \alpha^{1/n}) = (\alpha^{1/n})^n = \alpha$이다. (b) $\theta > 1$이면 $P_\theta(X_{(n)} > 1) = 1 - \theta^{-n}$, $P_\theta(X_{(n)} \leq \alpha^{1/n}) = \alpha\theta^{-n}$이므로 검정력은 $1 - (1-\alpha)\theta^{-n}$이다. 노트 연습 1.4와 같은 계산으로 1 대 θ의 최강력 검정의 검정력도 이 값이다. $\{X_{(n)} \leq 1\}$ 위에서는 가능도비가 상수 θ^{-n}이고, 그 위에서 크기 α를 어떻게 쓰든 검정력에 $\alpha\theta^{-n}$이 더해지며, $\{X_{(n)} > 1\}$은 크기를 쓰지 않고 검정력 $1 - \theta^{-n}$을 준다. (c) $\theta < 1$이면 $f_\theta(\mathbf{x}) = \theta^{-n}1\{x_{(n)} \leq \theta\}$, $f_1(\mathbf{x}) = 1\{x_{(n)} \leq 1\}$이다. 어떤 검정 ψ든 $E_\theta\psi = \theta^{-n}\int_{\{x_{(n)} \leq \theta\}} \psi f_1 \leq \theta^{-n}E_1\psi \leq \alpha\theta^{-n}$이고 1을 넘지 않는다. φ는 $\alpha^{1/n} \leq \theta$이면 $E_\theta\varphi = P_\theta(X_{(n)} \leq \alpha^{1/n}) = \alpha\theta^{-n}$, $\alpha^{1/n} > \theta$이면 1이다. (d) (b)(c)로 모든 $\theta \neq 1$에서 φ의 검정력이 크기 α인 검정이 얻을 수 있는 최댓값이므로 UMP다. $n = 5$, $\theta = 0.8$이면 $0.05/0.8^5 = 0.153$이다. 정규 평균에서는 양쪽 UMP가 없었다(노트 예제 2.5). 균등분포에서는 두 방향의 최강력 기각역이 서로 겹치지 않는 곳을 써서 한 검정에 담긴다.

최종답 $\dfrac{0.05}{0.8^5} \approx 0.153$

C4 Wilks 정리가 맞지 않는 가능도비 ★★

[T2] · 정의 3.1, 9회 정리 5.2 · 20분

$X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,\theta)$로 $H_0 : \theta = \theta_0$을 가능도비로 검정한다.

(a) $\lambda(\mathbf{x}) = (x_{(n)}/\theta_0)^n$ $(x_{(n)} \le \theta_0)$, 0 $(x_{(n)} > \theta_0)$임을 보여라.

(b) H_0 아래 $-2\log\lambda \sim \chi^2(2)$임을 보여라. 자유도는 n에 무관하다.

(c) Wilks 정리를 잘못 적용해 $\chi^2(1)$의 임계값 3.841로 기각하면 실제 크기는 얼마인가?

(d) Wilks 정리의 어느 가정이 깨졌는가?

풀이 (a) $L(\theta) = \theta^{-n}1\{\theta \ge x_{(n)}\}$은 $\theta = x_{(n)}$에서 최대 $x_{(n)}^{-n}$이다. H_0 아래 값은 $\theta_0^{-n}1\{x_{(n)} \le \theta_0\}$이므로 비는 주어진 꼴이다. (b) $P(U \le u) = P(X_{(n)} \le \theta_0 u^{1/n}) = u$이므로 $U \sim \mathrm{U}(0,1)$이다. $P(-2\log U > t) = P(U < e^{-t/2}) = e^{-t/2}$는 평균 2인 지수분포의 생존함수이고, 그것이 $\chi^2(2)$다(4회). (c) $P(\chi^2(2) > 3.841) = e^{-3.841/2} = 0.146$이다. 명목 0.05의 세 배다. (d) 9회 정리 5.2는 받침이 모수에 의존하지 않고 로그가능도가 참값 근처에서 두 번 미분가능하다는 정칙조건을 쓴다. 여기서는 받침 $(0,\theta)$가 θ에 따라 움직이고, 가능도가 최댓값에서 미분가능하지 않다(그 점에서 끊긴다).

최종답 $e^{-3.841/2} \approx 0.146$

C5 Wald의 둘째 등식 ★★

[T1] · 보조정리 4.3 · 20분

$Z_1, Z_2, \dots$ 가 iid이고 $EZ_1 = 0$, $EZ_1^2 = \sigma^2$이다. $S_n = \sum_{i \le n} Z_i$이다.

(a) N이 유계인 멈춤시각$(N \le m)$이면 $ES_N^2 = \sigma^2 EN$임을 보여라.

(b) 이 등식이 $EN < \infty$인 멈춤시각에서도 성립함을 인정하자. 대칭 ± 1 걸음 S_n이 $(-a, b)$를 처음 벗어나는 시각 N에 대해, Wald의 등식으로 $P(S_N = b)$를 구하고 (a)로 $EN = ab$를 보여라. $a = 3$, $b = 5$이면 EN은?

풀이 (a) $S_N = \sum_{i=1}^{m} Z_i 1\{N \ge i\}$이다. 제곱하면 $\sum_i Z_i^2 1\{N \ge i\} + 2\sum_{i<j} Z_i Z_j 1\{N \ge i\}1\{N \ge j\}$이고, $i < j$이면 $1\{N \ge i\}1\{N \ge j\} = 1\{N \ge j\}$이다. $Z_i 1\{N \ge j\}$는 $Z_1, \dots, Z_{j-1}$의 함수이므로 Z_j와 독립이고 $E[Z_j \cdot Z_i 1\{N \ge j\}] = EZ_j \cdot E[Z_i 1\{N \ge j\}] = 0$이다. 같은 이유로 $E[Z_i^2 1\{N \ge i\}] = \sigma^2 P(N \ge i)$이다. 유한합이므로 기댓값을 항별로 취해 $ES_N^2 = \sigma^2 \sum_i P(N \ge i) = \sigma^2 EN$ (2회 정리 1.13). (b) $S_N \in \{-a, b\}$이고 Wald의 등식으로 $ES_N = EN \cdot 0 = 0$이므로 $bP(S_N = b) - a\big(1 - P(S_N = b)\big) = 0$, $P(S_N = b) = \frac{a}{a+b}$이다. (a)의 등식$(\sigma^2 = 1)$으로 $EN = ES_N^2 = b^2\frac{a}{a+b} + a^2\frac{b}{a+b} = ab$이다. $a = 3$, $b = 5$이면 $EN = 15$이다.

최종답 $EN = ab = 15$

C6 Bayes 규칙은 허용적이다 ★★

[T2] · 정의 5.1, 정리 5.2 · 15분

모수공간이 유한하다: $\Omega = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$. 사전분포가 모든 점에 양의 확률 $\pi_j > 0$을 주고, δ_π가 Bayes 규칙이며 $r(\pi, \delta_\pi) < \infty$이다. 어떤 규칙 δ'도 δ_π를 "지배" 할 수 없음을 보여라. 곧 모든 j에서 $R(\theta_j, \delta') \le R(\theta_j, \delta_\pi)$이고 어떤 j에서 부등호가 엄격한 δ'는 없다. 사전확률이 0인 점이 있으면 어디서 증명이 막히는가?

풀이 δ'가 δ_π를 지배한다고 하자. 그러면 $r(\pi, \delta') = \sum_j \pi_j R(\theta_j, \delta') \le \sum_j \pi_j R(\theta_j, \delta_\pi) = r(\pi, \delta_\pi)$이고, 엄격한 부등호가 있는 j에서 $\pi_j > 0$이므로 전체 부등호도 엄격하다: $r(\pi, \delta') < r(\pi, \delta_\pi)$. 이것은 δ_π가 Bayes 위험을 최소화한다는 것에 모순이다. 사전확률이 0인 점 θ_j에서만 δ'가 낫다면 그 차이가 Bayes 위험에 더해지지 않아(0×차이) 엄격한 부등호가 나오지 않는다. 그런 경우에는 Bayes 규칙이 허용적이지 않을 수 있다.

C7 위험이 일정한 Bayes 규칙은 minimax다 ★★

정의 5.1 · 15분

δ가 사전분포 π의 Bayes 규칙이고 모든 θ에서 $R(\theta, \delta) = c$ (상수)이다.

(a) 모든 규칙 δ'에 대해 $\sup_\theta R(\theta, \delta') \ge r(\pi, \delta') \ge r(\pi, \delta) = c = \sup_\theta R(\theta, \delta)$임을 보이고, δ가 minimax임을 결론지어라.

(b) 노트 연습 5.4의 검정 "$x > \frac{1}{2}$이면 기각" 이 (a)의 예임을 확인하라. 위험은 두 오류 확률이다.

풀이 (a) $r(\pi, \delta') = \int R(\theta, \delta')\pi(d\theta) \le \sup_\theta R(\theta, \delta')$이다(평균은 최댓값 이하). Bayes 규칙의 정의로 $r(\pi, \delta') \ge r(\pi, \delta)$이고, $R(\theta, \delta) = c$이므로 $r(\pi, \delta) = c = \sup_\theta R(\theta, \delta)$이다. 따라서 모든 δ'에서 $\sup R(\theta, \delta') \ge \sup R(\theta, \delta)$, 곧 δ가 minimax다. (b) 0–1 손실이면 $R(H_0, \delta) = P_0(X > \frac{1}{2}) = 0.309$, $R(H_1, \delta) = P_1(X \le \frac{1}{2}) = 0.309$로 같다. $\pi_0 = \pi_1$인 Bayes 검정이 $x > \frac{1}{2}$이므로(따름정리 5.3) (a)로 minimax다.

C8 확률화하지 않으면 가능도비 순서가 깨진다 ★★

정리 1.2 · 20분

결과가 네 개인 실험에서 두 가설의 확률이 다음과 같다. 크기 0.05로 검정한다.

결과	x_1	x_2	x_3	x_4
f_0	0.04	0.03	0.02	0.91
f_1	0.08	0.054	0.035	0.831

(a) 각 결과의 가능도비를 구하고 큰 순서로 늘어놓아라.

(b) 확률화하지 않은 검정(결과의 부분집합) 가운데 크기 0.05 이하에서 검정력이 가장 큰 것을 모든 부분집합을 따져 찾고, 그 검정력을 구하라. 가능도비가 가장 큰 결과를 포함하는가?

(c) 정리 1.2의 확률화 검정의 검정력을 구하라.

풀이 (a) 가능도비는 x_1: 2, x_2: 1.8, x_3: 1.75, x_4: 0.913이다. 큰 순서는 x_1, x_2, x_3, x_4이다. (b) 크기가 0.05 이하인 부분집합은 $\varnothing$, $\{x_1\}$ (0.04), $\{x_2\}$ (0.03), $\{x_3\}$ (0.02), $\{x_2, x_3\}$ (0.05)이다. 검정력은 각각 0, 0.08, 0.054, 0.035, 0.089이므로 가장 좋은 것은 $\{x_2, x_3\}$이고 검정력 0.089이다. 가능도비가 가장 큰 x_1을 포함하지 않는다. 크기라는 예산을 남김없이 쓰는 조합이 이긴 것이다(배낭 문제). (c) x_1에 크기 0.04를 쓰고, 남은 0.01을 x_2에서 확률 $\gamma = \frac{0.01}{0.03} = \frac{1}{3}$로 쓴다. 검정력은 $0.08 + \frac{1}{3}\cdot 0.054 = 0.098$이다. 정리 1.2의 순서(가능도비가 큰 것부터)는 확률화를 허용할 때 최적이다. 확률화를 금지하면 문제는 정수 배낭 문제가 되고 탐욕적인 순서가 최적이 아닐 수 있다.

최종답 (b) 0.089 (c) 0.098

C9 (크기, 검정력)의 집합 ★★

[T2] · 정리 1.2 · 20분

f_0 대 f_1의 모든 검정 φ에 대해 점 $\big(E_0\varphi,\, E_1\varphi\big)$의 집합을 S라 하자.

(a) S가 볼록집합이고 $(0,0)$, $(1,1)$을 포함함을 보여라.

(b) $(\alpha,\gamma)\in S$이면 $(1-\alpha, 1-\gamma)\in S$임을 보여라.

(c) S의 위쪽 경계 $\gamma^*(\alpha)=\max\{\gamma : (\alpha,\gamma)\in S\}$가 Neyman–Pearson 검정의 검정력이고, α의 오목함수이며 $\gamma^*(\alpha)\ge\alpha$임을 보여라.

풀이 (a) φ_1,φ_2가 검정이면 $t\varphi_1+(1-t)\varphi_2$도 $[0,1]$ 값의 검정이고, 기댓값의 선형성으로 그 점은 두 점의 볼록결합이다. $\varphi\equiv 0$이 $(0,0)$, $\varphi\equiv 1$이 $(1,1)$을 준다. (b) $1-\varphi$도 검정이고 그 점은 $(1-\alpha,1-\gamma)$이다. (c) 정리 1.2로 크기 α에서 최대 검정력은 Neyman–Pearson 검정이 얻으므로 $\gamma^*(\alpha)$는 그 검정력이다. $\alpha = t\alpha_1+(1-t)\alpha_2$이면 크기 α_1, α_2의 최강력 검정을 섞은 검정의 점 $\big(\alpha,\, t\gamma^*(\alpha_1)+(1-t)\gamma^*(\alpha_2)\big)$이 S에 있으므로 $\gamma^*(\alpha)\ge t\gamma^*(\alpha_1)+(1-t)\gamma^*(\alpha_2)$, 곧 오목이다. 상수 검정 $\varphi\equiv\alpha$가 (α,α)를 주므로 $\gamma^*(\alpha)\ge\alpha$이다(따름정리 1.5(b)). 노트 8.1

> 절의 ROC 곡선이 바로 γ^* 이므로, 가능도비의 ROC 곡선은 오목하고 대각선 위에 있다.

D

퀄형

여러 절과 앞 회차의 도구를 잇는 종합 문제다. 머리의 제한 시간을 재고, 노트를 덮고 푼다. 검정을 유도할 때는 가능도비가 어떤 통계량의 단조함수인지부터 밝힌다.

D1 이동한 지수분포의 UMP 검정 ★★★

정리 2.4, 8회 정리 1.2 · 제한 35분

$X_1, \dots, X_n$이 iid이고 밀도가 $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$ $(x > \theta)$이다.

(a) 결합밀도를 써서 이 족이 $X_{(1)}$에 대해 단조가능도비를 가짐을 보여라(가능도비는 ∞를 허용한다).

(b) $X_{(1)} - \theta$가 비율 n의 지수분포임을 보이고, $H_0 : \theta \le 0$ 대 $H_1 : \theta > 0$의 크기 α UMP 검정이 "$X_{(1)} > c$이면 기각", $c = -\frac{1}{n}\log\alpha$임을 보여라.

(c) 검정력 함수를 구하라. $\theta > c$이면 검정력은 얼마인가?

(d) $n = 10$, $\alpha = 0.05$이면 c와 $\theta = 0.2$에서의 검정력은?

풀이 (a) 결합밀도는 $f(\mathbf{x};\theta) = e^{n\theta}e^{-\sum x_i}\mathbb{1}\{x_{(1)} > \theta\}$이다. $\theta_1 < \theta_2$이면 비 $f(\mathbf{x};\theta_2)/f(\mathbf{x};\theta_1)$는 $\theta_1 < x_{(1)} \le \theta_2$에서 0, $x_{(1)} > \theta_2$에서 $e^{n(\theta_2-\theta_1)}$이므로 $x_{(1)}$의 감소하지 않는 함수다(정의 2.2). (b) $P_\theta(X_{(1)} > t) = \prod_i P_\theta(X_i > t) = e^{-n(t-\theta)}$ $(t \ge \theta)$이므로 $X_{(1)} - \theta \sim$ 비율 n의 지수분포다(8회 정리 1.2의 최솟값). 정리 2.4로 UMP 검정은 $X_{(1)} > c$이고, $P_0(X_{(1)} > c) = e^{-nc} = \alpha$에서 $c = -\frac{1}{n}\log\alpha$이다. 단조가능도비의 비가 계단함수여서 경계 $\{X_{(1)} = c\}$는 확률 0이고 확률화가 필요 없다. (c) $\beta(\theta) = P_\theta(X_{(1)} > c) = e^{-n(c-\theta)} = \alpha e^{n\theta}$ $(\theta \le c)$이고 $\theta > c$이면 $X_{(1)} > \theta > c$이므로 1이다. (d) $c = \frac{\log 20}{10} = 0.300$, $\beta(0.2) = 0.05e^2 = \frac{e^2}{20} = 0.369$이다. 검정력이 θ에 대해 지수적으로 커지는 것은 정보가 n 비율로 쌓이는 정칙 모형($\sqrt{n}$ 비율)과 다른 점이다.

최종답 (a) $c = \frac{\log 20}{10} \approx 0.300$ (b) $\frac{e^2}{20} \approx 0.369$

D2 두 Poisson 비율의 비교 ★★★

정의 3.1, 11회 정리 1.3 · 제한 35분

같은 기간 동안 두 공장의 사고 수 $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda_2)$를 관측한다($X$, Y 독립). $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$를 검정한다.

(a) 가능도비 통계량이 $-2\log\lambda = 2\big[x\log\frac{2x}{x+y} + y\log\frac{2y}{x+y}\big]$임을 보이고 $x=12$, $y=4$에서 계산하라.

(b) H_0 아래 $X+Y=n$이 주어지면 $X \sim \mathrm{b}(n, \frac{1}{2})$임을 보이고, 이 조건부분포가 공통 λ에 의존하지 않는 이유를 충분성으로 설명하라.

(c) $x=12$, $y=4$에서 조건부 정확 검정의 한쪽 p-값 $P(X \ge 12 \mid X+Y=16)$을 구하라.

풀이 (a) 전체 모형의 MLE는 $\hat\lambda_1 = x$, $\hat\lambda_2 = y$이고 H_0 아래는 $\hat\lambda = \frac{x+y}{2}$이다. 로그가능도 $x\log\lambda_1 - \lambda_1 + y\log\lambda_2 - \lambda_2$에서 $-\lambda$ 항의 합은 두 경우 모두 $x+y$이므로 $-2\log\lambda = 2\big[x\log\frac{x}{\hat\lambda} + y\log\frac{y}{\hat\lambda}\big]$이다. $x=12$, $y=4$이면 $\hat\lambda = 8$, $2[12\log 1.5 + 4\log 0.5] = 2(4.866 - 2.773) = 4.19$이고 $\chi^2(1)$로 읽은 p-값은 0.041이다. (b) $P(X=k,\ Y=n-k)/P(X+Y=n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k/k!\cdot e^{-\lambda}\lambda^{n-k}/(n-k)!}{e^{-2\lambda}(2\lambda)^n/n!} = \binom{n}{k}2^{-n}$이다($X+Y \sim \mathrm{Poi}(2\lambda)$, 4회). λ가 지워진다. H_0 아래 결합 pmf는 $e^{-2\lambda}\lambda^{x+y}/(x!\,y!)$이므로 인수분해 정리(11회 정리 1.3)로 $X+Y$가 충분하고, 충분통계량이 주어진 조건부분포는 모수에 의존하지 않는다. 그래서 귀찮은 모수 λ 없이 정확한 검정을 만들 수 있다. (c) $P(\mathrm{b}(16,\frac{1}{2}) \ge 12) = \frac{1820+560+120+16+1}{65536} = \frac{2517}{65536} = 0.0384$이다. 양쪽이면 두 배인 0.077로, 가능도비 검정의 근사 p-값 0.041보다 크다.

최종답 (a) ≈ 4.19 (b) $\frac{2517}{65536} \approx 0.0384$

D3 불량률의 축차 검사 ★★★

정리 4.2, 보조정리 4.3 · 제한 35분

불량률 p인 제품을 하나씩 검사해 $H_0 : p = 0.1$ 대 $H_1 : p = 0.3$을 $\alpha = \beta = 0.05$의 SPRT로 결정한다. n개까지의 불량품 수를 d_n이라 하자.

(a) 계속할 영역이 $sn - h < d_n < sn + h$ 꼴의 띠임을 보이고 (a) 기울기 s와 (b) 절편 h를 구하라.

(c) Wald의 근사로 (c) $E_{0.1}N$과 (d) $E_{0.3}N$을 구하라.

(d) 양품만 계속 나오면 (e) 몇 개째에 H_0를 택하는가? 불량품만 계속 나오면 (f) 몇 개째에 H_1을 택하는가?

풀이 (a)(b) $\Lambda_n = d_n\log 3 + (n-d_n)\log\frac{7}{9} = d_n\log\frac{27}{7} - n\log\frac{9}{7}$이다. $B < \Lambda_n < A$를 d_n에 대해 풀면 $\frac{n\log(9/7) - \log 19}{\log(27/7)} < d_n < \frac{n\log(9/7)+\log 19}{\log(27/7)}$이므로 $s = \frac{\log(9/7)}{\log(27/7)} = 0.186$, $h = \frac{\log 19}{\log(27/7)} = 2.18$이다. 기울기 s는 두 불량률 사이의 값이다. (c)(d) $E_{0.1}Z = 0.1\log 3 + 0.9\log\frac{7}{9} = -0.1163$, $E_{0.3}Z = 0.3\log 3 + 0.7\log\frac{7}{9} = 0.1537$이다. 보조정리 4.3에 $\Lambda_N \approx A$ 또는 B를 넣으면 $E_{0.1}N \approx \frac{0.95B + 0.05A}{E_{0.1}Z} = \frac{-0.9\log 19}{-0.1163} = 22.8$, $E_{0.3}N \approx \frac{0.05B+0.95A}{E_{0.3}Z} = \frac{0.9\log 19}{0.1537} = 17.2$이다. (e) 양

품만이면 $\Lambda_n = n\log\frac{7}{9} \le -\log 19$, 곧 $n \ge \frac{\log 19}{\log(9/7)} = 11.7$이므로 12개째다. (f) 불량품만이면 $d\log 3 \ge \log 19$, $d \ge 2.68$이므로 3개째다.

최종답 (a) $s \approx 0.186$ (b) $h \approx 2.18$ (c) $E_0N \approx 22.8$ (d) $E_1N \approx 17.2$ (e) 12 (f) 3

D4 비용이 다른 분류: Bayes와 minimax ★★★

정리 5.2, 따름정리 5.3 · 제한 35분

관측 x 하나로 무리 0 ($\mathcal{N}(0,1)$)과 무리 1 ($\mathcal{N}(2,1)$)을 가른다. 무리 1의 사전확률은 0.2이고, 무리 1을 무리 0으로 잘못 부르는 비용은 5, 반대 오류의 비용은 1이다(맞으면 0). 규칙은 "$x > t$이면 무리 1"이다.

(a) Bayes 규칙의 t를 구하라.

(b) 그 Bayes 위험 $0.8\cdot 1\cdot P_0(X>t) + 0.2\cdot 5\cdot P_1(X\le t)$를 구하라.

(c) 두 무리의 위험 $1\cdot P_0(X>t)$와 $5\cdot P_1(X\le t)$를 같게 하는 t(minimax 규칙)를 수치로 구하라.

(d) (c)의 규칙이 minimax인 이유를 C7로 설명하라. 어떤 사전확률에 대한 Bayes 규칙인가?

풀이 (a) 따름정리 5.3으로 $e^{2x-2} > 0.8$, 곧 $x > 1 + \frac{1}{2}\log 0.8 = 0.888$이면 무리 1이다. (b) $0.8(1-\Phi(0.888)) + 1.0\cdot\Phi(0.888-2) = 0.8\times 0.1872 + 0.1332 = 0.283$이다. (c) $g(t) = 1-\Phi(t)-5\Phi(t-2)$는 감소함수이고 $g(0.4)>0>g(0.5)$이다. 이분법으로 $t = 0.474$이며, 이때 두 위험은 모두 0.318이다. (d) $t = 0.474$는 가능도비 임계값 $e^{2t-2} = 0.349 = \frac{\pi_0\cdot 1}{\pi_1\cdot 5}$, 곧 $\pi_0/\pi_1 = 1.75$인 사전확률($\pi_1 \approx 0.36$)에 대한 Bayes 규칙이다. 그 규칙의 위험이 두 무리에서 같으므로 C7로 minimax다. minimax 규칙은 실제 사전확률 0.2를 모르는 것처럼 행동하므로, 사전확률을 아는 사람의 Bayes 위험(0.283)보다 큰 최악의 위험(0.318)을 받아들이는 대신 어느 무리가 참이어도 위험이 0.318을 넘지 않는다.

최종답 (a) $t \approx 0.888$ (b) ≈ 0.283 (c) $t \approx 0.474$