수리통계학 × 통계학의 역사

8회 워크북 — 풀이판

추론의 기초
손으로 푸는 35문항

학생판과 같은 문제에 빈칸의 답과 완전한 풀이를 붙였다. 학생판으로 먼저 풀고, 힌트와 최종답으로도 막힐 때 이 판을 본다.

부	하는 일	문항	예상 시간
A 계산 드릴	순서통계량, 구간, 검정력, p-값, χ^2를 손으로 계산한다	15	1시간 56분
B 빈칸 증명	노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다	7	2시간 50분
C 증명 문제	변형, 일반화, 반례 만들기	9	2시간 40분
D 퀄형	여러 절과 앞 회차를 잇는 종합 문제. 제한 시간 안에	4	2시간 25분
	합계	35	약 10시간

노트 `08_inference_notes.pdf` — 문항의 "정리 5.1" 같은 번호는 노트의 번호다

도구 `00_toolkit_notes.pdf` — [T1] 원소 추적, [T5] 극한과 하한, [T8] o와 O

검산 노트북 `08_inference.ipynb`의 "워크북 검산" 절: `check("A1a", "1/3")`

이 워크북을 쓰는 법

1. **노트를 덮고 푼다.** 문제의 머리 오른쪽에 쓸 도구, 관련 정리 번호, 예상 시간이 있다. 예상 시간의 두 배가 지나도 진척이 없으면 그때 노트를 편다.
2. **막히면 3단으로 본다.** 뒤의 **힌트와 최종답**에서 힌트를 먼저 본다. 다 푼 뒤에는 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나거나 증명이 막히면 풀이판을 본다.
3. **B부는 순서대로 푼다.** Pearson의 χ^2는 세 번, p-값의 분포와 순서통계량의 결합밀도는 두 번 만난다. 처음에는 근거만 빈칸이고(①), 다음에는 단계의 이름만 있고(②), 마지막에는 전략만 있다(③).
4. **계산은 검산한다.** 최종답이 수나 식인 문항은 노트북의 `check()`에 넣으면 맞는지만 알려 준다. 분위수를 표에서 읽은 답은 소수 넷째 자리까지 맞으면 맞다고 본다.
5. **증명은 근거를 단다.** 등호와 부등호마다 어느 정의, 정리, 앞 회차의 결과를 썼는지 오른쪽에 적는다. 노트의 단계형 증명과 같은 모양이다.

표시 ★ 정의를 바로 쓰는 문제, ★★ 두세 단계를 잇는 문제, ★★★ 퀄에 나오는 길이의 문제. [T1]–[T8]은 증명 도구 상자의 도구 번호다.

A

계산 드릴

정의와 공식을 손으로 돌린다. 답이 수나 식으로 떨어지므로 다 풀면 뒤의 최종답이나 노트북의 `check()`로 맞춰 본다. 분위수는 표나 계산기에서 읽는다. 표준정규의 위쪽 분위수는 $z_{0.05}=1.645$, $z_{0.025}=1.960$, $z_{0.10}=1.282$를 쓴다.

A1 균등분포의 둘째 순서통계량 ★

따름정리 1.3 · 8분

$X_1,\dots,X_5 \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$이다. (a) $EX_{(2)}$를 구하라. (b) $P(X_{(2)} \le \frac{1}{2})$를 구하라.

풀이 (a) 따름정리 1.3에서 $F(x)=x$이므로 $f_{(2)}(x)=20x(1-x)^3$, 곧 $\mathrm{Beta}(2,4)$이고 평균은 $\frac{2}{2+4}=\frac{1}{3}$이다. (b) $\frac{1}{2}$ 이하인 관측의 수는 $\mathrm{b}(5,\frac{1}{2})$이므로 $P(X_{(2)}\le\frac{1}{2}) = 1-P(0\text{개})-P(1\text{개}) = 1-\frac{1+5}{32}=\frac{13}{16}$이다.

최종답 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{13}{16}$

A2 지수 표본의 최솟값과 최댓값 ★

3회 예제 3.5 · 8분

$X_1,\dots,X_4$가 독립이고 평균 2인 지수분포를 따른다. (a) $EX_{(1)}$, (b) $P(X_{(4)}\le 2)$를 구하라.

풀이 (a) $P(X_{(1)}>x)=(e^{-x/2})^4=e^{-2x}$이므로 $X_{(1)}$은 평균 $\frac{1}{2}$인 지수분포다. (b) $P(X_{(4)}\le 2)=(1-e^{-1})^4\approx 0.160$이다.

최종답 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $(1-e^{-1})^4\approx 0.160$

A3 노획한 일련번호 ★

정리 1.6 · 6분

일련번호 $1,\dots,N$인 전차 가운데 4대를 노획했더니 번호가 19, 40, 42, 60이었다. (a) 정리 1.6의 불편추정량 $\hat N$의 값, (b) 적률법 추정량 $2\bar X-1$의 값을 구하라.

풀이 (a) $M=60$, $k=4$이므로 $\hat N=\frac{5}{4}\cdot 60-1=74$이다. (b) $\bar X=\frac{161}{4}=40.25$이므로 $2\bar X-1=79.5$이다. 두 추정값은 다르지만 둘 다 불편이다. 분산은 $\hat N$ 쪽이 $\frac{k+2}{3}=2$배 작다.

최종답 (a) 74 (b) 79.5

A4 최댓값의 분포 ★★

정리 1.6 · 10분

$\{1, \dots, 100\}$에서 4개를 비복원으로 뽑은 최댓값을 M이라 하자. (a) EM을 구하라. (b) $P(M \le 50)$을 구하라.

풀이 (a) 정리 1.6으로 $EM = \frac{4 \cdot 101}{5} = 80.8$이다. (b) $P(M \le 50) = \binom{50}{4} / \binom{100}{4} = \frac{230300}{3921225} = \frac{188}{3201} \approx 0.0587$이다. 네 번호의 최댓값이 절반 아래에 머물 확률은 6% 정도다.

최종답 (a) 80.8 (b) $\frac{188}{3201} \approx 0.0587$

A5 지수 수명의 정확한 구간 ★★

정리 2.2 · 10분

수명이 평균 θ인 지수분포를 따르는 부품 5개의 수명의 합이 400시간이었다. 노트 예제 2.3의 축량으로 θ의 95% 신뢰구간을 구하라. ($\chi^2_{10,0.025} = 20.483$, $\chi^2_{10,0.975} = 3.247$)

풀이 $2\sum X_i = 800$이므로 구간은 $[800/20.483,\ 800/3.247] = [39.06,\ 246.4]$시간이다. 점추정값 $\bar{x} = 80$에 대해 오른쪽으로 훨씬 길다. 표본이 5개뿐이면 큰 θ를 배제하기 어렵다.

최종답 (a) 39.06 (b) 246.4

A6 균등분포의 상한 ★

정리 2.2 · 8분

$X_1, \dots, X_4 \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0, \theta)$에서 $M = X_{(4)} = 3.0$이었다. 축량 M/θ로 만든 90% 구간 $[M,\ M\alpha^{-1/n}]$의 위쪽 끝을 구하라.

풀이 $P(0.1^{1/4} \le M/\theta \le 1) = 1 - 0.1 = 0.9$이고 이것을 θ에 대해 풀면 $M \le \theta \le M \cdot 0.1^{-1/4}$이다. 위쪽 끝은 $3 \cdot 10^{1/4} \approx 5.335$이다.

최종답 $3 \cdot 10^{1/4} \approx 5.335$

A7 비율의 Wald 구간 ★

정리 2.4 · 6분

400명 가운데 88명이 "예"라고 답했다. 비율의 95% Wald 구간의 (a) 아래쪽 끝, (b) 위쪽 끝을 구하라($z = 1.96$).

풀이 $\hat{p} = 0.22$, 표준오차 $\sqrt{0.22 \cdot 0.78/400} = 0.0207$이므로 $0.22 \pm 0.0406 = [0.1794,\ 0.2606]$이다. $np = 88$이 크므로 Wald 구간을 써도 된다(노트 7.3절과 비교).

최종답 (a) 0.1794 (b) 0.2606

A8 분포를 가정하지 않는 중앙값의 구간 ★

정리 2.6 · 8분

연속분포의 표본 $n=15$에서 구간 $[X_{(4)}, X_{(12)}]$가 중앙값을 덮을 확률을 정확히 구하라.

풀이 정리 2.6으로 $P(4 \le K \le 11) = 1 - 2P(K \le 3) = 1 - 2 \cdot \frac{1+15+105+455}{32768} = 1 - \frac{1152}{32768} = \frac{247}{256} \approx 0.965$이다.

최종답 $\frac{247}{256} \approx 0.965$

A9 이항 검정의 크기와 검정력 ★★

정의 3.2 · 10분

$X \sim \mathrm{b}(20, p)$로 $H_0 : p = \frac{1}{2}$ 대 $H_1 : p > \frac{1}{2}$를 검정하며 $X \ge 15$이면 기각한다. (a) 크기, (b) $p = 0.7$에서의 검정력을 구하라.

풀이 (a) $\frac{21700}{2^{20}} = \frac{5425}{262144} \approx 0.0207$이다. (b) $\sum_{k=15}^{20} \binom{20}{k} 0.7^k 0.3^{20-k} \approx 0.416$이다. 크기를 0.05에 가깝게 하려면 기각역을 $X \ge 14$로 넓혀야 하는데, 그러면 크기가 0.058로 0.05를 넘는다. 이산분포에서는 크기를 정확히 0.05로 맞출 수 없다.

최종답 (a) $\frac{5425}{262144} \approx 0.0207$ (b) 0.4164

A10 표본 크기 ★

정리 3.4 · 8분

σ를 아는 정규 평균의 한쪽 z 검정을 크기 0.05로 할 때, $\delta = 0.25\sigma$의 차이를 검정력 0.9로 잡으려면 최소 몇 개의 관측이 필요한가?

풀이 $n \ge \left(\frac{1.645+1.282}{0.25}\right)^2 = (11.71)^2 = 137.0$이므로 138개다. 정확한 분위수 $z_{0.05} = 1.6449$, $z_{0.1} = 1.2816$으로 계산해도 137.02이므로 답은 같다.

최종답 138

A11 주어진 평균에서의 검정력 ★

정리 3.4 · 8분

$X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 10^2)$, $n = 25$로 $H_0 : \mu \le 100$을 크기 0.05의 한쪽 z 검정으로 한다. $\mu = 105$에서의 검정력을 구하라.

풀이 $\sqrt{25} \cdot 5/10 = 2.5$이므로 $\gamma(105) = \Phi(2.5 - 1.645) = \Phi(0.855) \approx 0.804$이다.

최종답 0.8038

A12 p-값 ★

정의 4.1 · 6분

z 검정통계량의 관측값이 2.3이었다. (a) 양쪽 p-값, (b) 한쪽($H_1 : \mu > \mu_0$) p-값을 구하라. ($\Phi(2.3) = 0.98928$)

풀이 (a) $2(1-0.98928) = 0.0214$. (b) 0.0107. 같은 자료가 어느 대립가설을 미리 정했느냐에 따라 두 배 다른 p-값을 준다.

최종답 (a) 0.0214 (b) 0.0107

A13 주사위의 적합도 ★

정리 5.1 · 8분

주사위를 120번 던져 눈 1–6이 각각 18, 23, 16, 21, 18, 24번 나왔다. (a) 공평한 주사위에 대한 Pearson X^2, (b) 그 근사 p-값을 구하라. ($P(\chi^2(5) \geq 2.5) = 0.776$)

풀이 (a) $X^2 = \frac{4+9+16+1+4+16}{20} = \frac{50}{20} = 2.5$. (b) 자유도 5에서 $p \approx 0.776$이다. 공평한 주사위와 잘 맞는다. 기대도수가 모두 20이므로 근사도 믿을 만하다.

최종답 (a) $X^2 = 2.5$ (b) 0.776

A14 2×2 표의 독립성 ★

따름정리 5.2 · 6분

치료(가, 나)와 결과(좋음, 나쁨)의 표가 가: (30, 20), 나: (20, 30)이다. (a) 독립성 검정의 X^2, (b) 근사 p-값을 구하라. ($P(\chi^2(1) \geq 4) = 0.0455$)

풀이 (a) 네 칸 모두 $|O-E| = 5$이므로 $X^2 = 4 \cdot \frac{25}{25} = 4$. 공식으로는 $\frac{100(900-400)^2}{50^4} = 4$. (b) 자유도 1에서 $p = 0.0455$이다.

최종답 (a) $X^2 = 4$ (b) 0.0455

A15 동시 신뢰구간의 배수 ★

명제 8.3 · 6분

평균 20개에 대해 동시에 95% 이상으로 덮는 Bonferroni 구간 $\bar{x}_j \pm c \cdot \mathrm{se}_j$를 만든다(양쪽, 정규근사). c를 구하라. ($\Phi(3.023) = 0.99875$)

풀이 각 구간이 놓칠 확률을 $0.05/20 = 0.0025$로 하면, 놓치는 사건들의 합집합에 Boole 부등식을 써서(명제 8.3과 같은 논리) 하나라도 놓칠 확률이 0.05 이하다. 양쪽 구간이므로 한쪽 꼬리가 0.00125이고 $c = z_{0.00125} \approx 3.023$이다. 구간 하나만이면 1.96이므로 동시 보장의 대가로 구간이 1.54배 넓어진다.

최종답 $z_{0.00125} \approx 3.023$

B

빈칸 증명

노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다. 같은 정리를 여러 번 만나며 도움이 줄어든다. ① 단계는 주어지고 근거만 빈칸이다. ② 단계의 이름만 주어진다. ③ 전략만 주어진다. 근거에는 앞 회차의 정리 번호, 정의, 도구 번호를 쓴다.

B1 Pearson의 χ^2, 근거 채우기 ★★

① · 정리 5.1 · 20분

$H_0: \mathbf{p} = \mathbf{p}^0$이 참이면 $X^2 = \sum_j \frac{(N_j - np_j^0)^2}{np_j^0} \xrightarrow{D} \chi^2(k-1)$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $D = \mathrm{diag}(\mathbf{p}^0)$, $\mathbf{V}_n = D^{-1/2}\sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}^0)$로 두면 $X^2 = \|\mathbf{V}_n\|^2$이다. — $\hat{p}_j = N_j/n$을 대입

② $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}^0) \xrightarrow{D} \mathcal{N}_k(\mathbf{0},\ D - \mathbf{p}^0\mathbf{p}^{0\prime})$이다. — 다항분포의 CLT, 7회 예제 5.3

③ $\mathbf{u} = (\sqrt{p_j^0})_j$이면 $\mathbf{V}_n \xrightarrow{D} \mathcal{N}_k(\mathbf{0},\ I - \mathbf{u}\mathbf{u}')$이다. — 연속사상, 5회 정리 3.8

④ $P = I - \mathbf{u}\mathbf{u}'$는 사영행렬이고 극한은 $P\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, I)$의 분포다. — 연습 5.2, $PP' = P$

⑤ 첫 열이 $\mathbf{u}$인 직교행렬 Q로 $\mathbf{W} = Q'\mathbf{Z}$를 만들면 $\|P\mathbf{Z}\|^2 = \sum_{i \geq 2} W_i^2 \sim \chi^2(k-1)$이다. — $W_1 = \mathbf{u}'\mathbf{Z}$, 4회 정리 3.9

⑥ $X^2 = \|\mathbf{V}_n\|^2 \xrightarrow{D} \|P\mathbf{Z}\|^2$이다. — $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|^2$의 연속사상

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 정리 5.1의 증명과 같다. 셋째 단계의 공분산은 $D^{-1/2}(D - \mathbf{p}^0\mathbf{p}^{0\prime})D^{-1/2} = I - \mathbf{u}\mathbf{u}'$이다. 다섯째 단계에서 $\|\mathbf{W}\| = \|\mathbf{Z}\|$이므로 $\|P\mathbf{Z}\|^2 = \|\mathbf{Z}\|^2 - (\mathbf{u}'\mathbf{Z})^2 = \sum_i W_i^2 - W_1^2$이다.

B2 p-값의 분포, 근거 채우기 ★★

① · 정리 4.2 · 15분

$G(t) = P_{\theta_0}(T \geq t)$, $p(T) = G(T)$이다. 근거를 채워라.

(a) T의 분포함수 F가 연속일 때

① $G(t) = 1 - F(t-) = 1 - F(t)$이다. — 1회 정리 6.3(d), F 연속

② $F(T) \sim \mathrm{U}(0,1)$이다. — 확률적분변환, 2회 정리 4.7

③ $p(T) = 1 - F(T) \sim \mathrm{U}(0,1)$이다. — $P(1-U \leq u) = P(U \geq 1-u) = u$

(b) 일반적인 T

① $S_\alpha = \{t : G(t) \leq \alpha\}$는 $t_\alpha = \inf S_\alpha$에 대해 $[t_\alpha, \infty)$ 또는 (t_α, ∞)이다. — G는 비증가 [T5]

② $S_\alpha = [t_\alpha, \infty)$이면 $P(G(T) \leq \alpha) = G(t_\alpha) \leq \alpha$이다. — $t_\alpha \in S_\alpha$

③ $S_\alpha = (t_\alpha, \infty)$이면 $P(T > t_\alpha) = \lim_n G(t_\alpha + \frac{1}{n}) \leq \alpha$이다. — 연속성, 1회 정리 4.7(a)

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. (b)의 셋째 단계에서 사건 $\{T \geq t_\alpha + \frac{1}{n}\}$은 n에 대해 증가하고 합집합이 $\{T > t_\alpha\}$이다. $t_\alpha + \frac{1}{n} \in S_\alpha$이므로 각 확률은 α 이하이고 극한도 그렇다.

B3 순서통계량의 결합밀도, 근거 채우기 ★★

① · 정리 1.2 · 15분

밀도 f를 갖는 iid의 순서통계량의 결합밀도가 $n!\prod f(y_i)$ $(y_1 < \cdots < y_n)$임의 증명이다. $A \subset \{y_1 < \cdots < y_n\}$이다. 근거를 채워라.

① $i \neq j$이면 $P(X_i = X_j) = 0$이다. — 독립, 1회 정리 6.7(b)

② $E_\pi = \{X_{\pi(1)} < \cdots < X_{\pi(n)}\}$들은 쌍마다 서로소이고 합집합의 확률이 1이며, E_π 위에서 $X_{(i)} = X_{\pi(i)}$이다. — ①, 원소 추적 [T1]

③ $P\big((X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}) \in A\big) = \sum_\pi P\big((X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)}) \in A\big)$이다. — ②, 유한가법성

④ 각 항은 $\int_A \prod_i f(y_i)\, d\mathbf{y}$이다. — iid, 곱은 순서와 무관

⑤ 결합밀도는 $n!\prod_i f(y_i)$이다. — 항이 $n!$개, 밀도의 정의

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 첫 단계는 $P(X_i = X_j) = \int P(X_j = x) f(x)\, dx$이고, 연속확률변수에서 $P(X_j = x) = 0$이기 때문이다.

B4 Pearson의 χ^2, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 5.1 · 35분

정리 5.1을 증명하라. 단계의 이름만 주어진다. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① X^2를 벡터의 길이의 제곱으로 쓴다

② 비율 벡터의 다변량 중심극한정리

③ 표준화한 벡터의 극한과 그 공분산 $I - \mathbf{u}\mathbf{u}'$

④ 공분산이 사영행렬임을 확인하고 극한을 $P\mathbf{Z}$로 쓴다

⑤ 회전해 $\chi^2(k-1)$을 읽는다

⑥ 연속사상으로 마무리한다

풀이

① $\mathbf{V}_n = D^{-1/2}\sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}^0)$, $X^2 = \|\mathbf{V}_n\|^2$. — 대입

② $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}^0) \xrightarrow{D} \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, D - \mathbf{p}^0\mathbf{p}^{0\prime})$. — 7회 예제 5.3

③ $\mathbf{V}_n \xrightarrow{D} \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, I - \mathbf{u}\mathbf{u}')$, $D^{-1/2}\mathbf{p}^0 = \mathbf{u}$. — 연속사상, 5회 정리 3.8

④ $P' = P = P^2$이므로 $P\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, P)$. — 연습 5.2

⑤ $\|P\mathbf{Z}\|^2 = \|\mathbf{W}\|^2 - W_1^2 \sim \chi^2(k-1)$. — 4회 정리 3.9

⑥ $X^2 \xrightarrow{D} \chi^2(k-1)$. — 연속사상

B5 순서통계량의 결합밀도, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 1.2 · 25분

정리 1.2를 증명하라. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① 같은 값이 나올 확률이 0임을 보인다

② 어느 X_i가 몇 번째인가로 표본공간을 나눈다

③ 순서통계량의 사건을 조각들의 합으로 쓴다

④ 조각마다 확률이 같음을 보인다

⑤ 밀도를 읽는다

풀이 노트 정리 1.2의 증명과 같다. 단계별 근거는 B3의 풀이를 본다. 둘째 단계의 조각들 E_π가 확률 1로 표본공간을 덮는 것은 첫 단계(같은 값이 없음) 덕분이다. 같은 값이 양의 확률로 나오는 이산분포에서는 결합밀도가 없고, 이 증명의 둘째 단계가 성립하지 않는다.

B6 Pearson의 χ^2, 전략만 ★★★

③ · 정리 5.1 · 35분

정리 5.1을 증명하라.

전략 X^2를 한 벡터의 길이의 제곱으로 쓴다. 그 벡터의 정규 극한이 $(k-1)$차원 공간으로의 사영임을 보이고, 회전해 $\chi^2(k-1)$을 읽는다.

풀이 B4의 풀이와 같다. 자유도가 $k-1$인 것은 넷째 단계, 곧 극한의 공분산 $I-\mathbf{u}\mathbf{u}'$가 $\mathbf{u}$ 방향을 없애는 사영이라는 데 있다. 그 원인은 $\sum_j (N_j - np_j^0) = 0$, 곧 $\mathbf{u}'\mathbf{V}_n = 0$이다. 모수를 추정하면 같은 사영이 추정한 모수의 수만큼 차원을 더 없앤다(노트 5.2절의 상자).

B7 p-값의 분포, 전략만 ★★

③ · 정리 4.2 · 25분

T가 어떤 분포를 따르든 모든 $\alpha \in (0,1)$에서 $P_{\theta_0}(p(T) \le \alpha) \le \alpha$임을 보이고, T의 분포함수가 연속이면 등호임을 보여라.

전략 $p(T) = G(T)$, $G(t) = P(T \ge t)$로 쓴다. $\{G(T) \le \alpha\}$는 T의 위쪽 꼬리 사건이고, 그 확률은 꼬리가 시작하는 점에서의 G 값으로 위에서 막힌다. 연속이면 확률적분변환을 쓴다.

풀이 노트 정리 4.2의 단계형 증명과 같다. 단계별 근거는 B2의 풀이를 본다. 등호가 모든 α에서 성립하려면 $p(T)$가 균등분포여야 하고, T가 한 점에 양의 확률을 가지면 $G(T)$도 그 값에 양의 확률을 가지므로 균등일 수 없다. 따라서 "모든 α에서 등호"는 T의 분포함수가 연속인 것과 같다.

C

증명 문제

노트의 정리를 변형하고, 일반화하고, 반례로 경계를 확인한다. 증명은 노트의 단계형 모양으로 쓴다. 한 줄에 한 단계, 줄마다 근거.

C1 최솟값과 최댓값의 결합밀도 ★★

[T1] · 정리 1.2 · 20분

$X_1, \dots, X_n$ $(n \ge 2)$이 분포함수 F, 밀도 f를 갖는 iid이다.

(a) $u < v$이면 $P(u < X_{(1)},\ X_{(n)} \le v) = \big(F(v) - F(u)\big)^n$ 임을 보여라.

(b) $P(X_{(1)} \le u,\ X_{(n)} \le v) = F(v)^n - \big(F(v) - F(u)\big)^n$ $(u < v)$을 보여라.

(c) (b)를 u와 v로 미분해 $(X_{(1)}, X_{(n)})$의 결합밀도 $n(n-1)\big(F(v)-F(u)\big)^{n-2} f(u) f(v)$ $(u < v)$를 얻어라.

(d) $\mathrm{U}(0,1)$이면 범위의 기댓값 $E(X_{(n)} - X_{(1)})$은 n의 어떤 식인가?

풀이 (a) $u < X_{(1)}$이고 $X_{(n)} \le v$인 것은 모든 X_i가 $(u, v]$에 있다는 것이고, 독립으로 확률은 $(F(v) - F(u))^n$이다. (b) $\{X_{(1)} \le u, X_{(n)} \le v\} = \{X_{(n)} \le v\} \setminus \{u < X_{(1)}, X_{(n)} \le v\}$이고 뒤의 사건이 앞의 사건에 포함되므로 차 공식으로 $F(v)^n - (F(v) - F(u))^n$이다. (c) 결합분포함수 $H(u,v)$의 혼합편도함수가 결합밀도다. $\partial_v H = nF(v)^{n-1} f(v) - n(F(v) - F(u))^{n-1} f(v)$이고 첫 항은 u와 무관하므로 $\partial_u \partial_v H = n(n-1)(F(v) - F(u))^{n-2} f(u) f(v)$이다. $u \ge v$이면 $H(u,v) = F(v)^n$이 u와 무관하므로 밀도가 0이다. (d) $EX_{(n)} = \int_0^1 (1 - x^n)\, dx = \frac{n}{n+1}$, $EX_{(1)} = \int_0^1 (1-x)^n\, dx = \frac{1}{n+1}$이므로 $\frac{n-1}{n+1}$이다. 노트 연습 1.1의 $\mathrm{Beta}(n-1, 2)$의 평균과 같다.

최종답 (d) $\frac{n-1}{n+1}$

C2 최댓값의 일치성과 $1/n$의 속도 ★★

[T5], [T8] · 정의 1.1 · 20분

$X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,\theta)$, $M_n = X_{(n)}$이다.

(a) 모든 $\varepsilon \in (0,\theta)$에서 $P(\theta - M_n > \varepsilon) = (1-\varepsilon/\theta)^n$을 보이고, M_n이 θ의 일치추정량임을 보여라.

(b) $t > 0$이면 $P\big(n(\theta - M_n) > t\big) \to e^{-t/\theta}$임을 보여라. 곧 $n(\theta - M_n)$은 평균 θ인 지수분포로 분포수렴한다.

(c) 표본평균에 바탕한 $2\bar X$는 $\sqrt{n}(2\bar X - \theta)$가 정규로 수렴한다. 두 추정량의 오차의 크기를 n의 거듭제곱으로 비교하라.

(d) $\theta = 1$, $n = 50$이면 $P(n(\theta - M_n) > 1)$의 정확한 값은 얼마인가?

풀이 (a) $\{\theta - M_n > \varepsilon\} = \{\text{모든 } X_i < \theta - \varepsilon\}$이므로 확률은 $(1-\varepsilon/\theta)^n \to 0$이다. $M_n \le \theta$이므로 $P(|M_n - \theta| > \varepsilon) \to 0$, 곧 일치한다. (b) $t < n\theta$이면 (a)에 $\varepsilon = t/n$을 넣어 $(1 - \frac{t/\theta}{n})^n \to e^{-t/\theta}$이다. 이것은 평균 θ인 지수분포의 꼬리이고, 꼬리의 수렴은 분포함수의 수렴과 같다. (c) $M_n - \theta = O_p(1/n)$이고 $2\bar X - \theta = O_p(1/\sqrt{n})$이다. 표본이 네 배가 되면 M_n의 오차는 4분의 1로, $2\bar X$의 오차는 절반으로 준다. 정리 1.6의 전차 추정량이 적률법보다 나았던 것도 이 차이다. (d) $(1 - \frac{1}{50})^{50} \approx 0.3642$이고 극한 $e^{-1} = 0.3679$와 0.004 차이다.

최종답 (d) $(1 - \frac{1}{50})^{50} \approx 0.3642$

C3 위치–척도 모형의 축량 ★★

정리 2.2 · 15분

$Z_1, \dots, Z_n$이 알려진 밀도 g를 갖는 iid이고 $X_i = \mu + \sigma Z_i$ $(\sigma > 0)$이다. $\bar X$, S는 표본평균과 표본표준편차다.

(a) $\bar X = \mu + \sigma \bar Z$, $S = \sigma S_Z$임을 보여라.

(b) $T = \frac{\bar X - \mu}{S}$의 분포가 μ와 σ에 의존하지 않음을 보여라. 곧 T는 축량이다.

(c) T의 분위수 $a < b$로 μ의 정확한 $1-\alpha$ 구간을 만들어라. g가 정규이면 무엇이 되는가?

(d) S/σ도 σ의 축량임을 보여라.

풀이 (a) $\bar X = \frac{1}{n}\sum(\mu + \sigma Z_i) = \mu + \sigma\bar Z$이고 $X_i - \bar X = \sigma(Z_i - \bar Z)$이므로 $S^2 = \sigma^2 S_Z^2$이다. (b) $T = \frac{\sigma \bar Z}{\sigma S_Z} = \frac{\bar Z}{S_Z}$이고, Z들의 결합분포는 g만으로 정해지므로 T의 분포는 μ, σ와 무관하다. (c) $P(a \le T \le b) = 1-\alpha$이고 T는 μ에 대해 감소하므로, 정리 2.2로 $\{\mu : a \le \frac{\bar X - \mu}{S} \le b\} = [\bar X - bS,\ \bar X - aS]$가 정확한 구간이다. g가 정규이면 $\sqrt{n}T \sim t(n-1)$이므로 6회의 t-구간이다. g가 정규가 아니어도 T의 분위수를 g로 시뮬레이션해 얻으면 정확한 구간이 된다. (d) $S/\sigma = S_Z$는 Z들만의 함수다.

C4 두 신뢰구간을 함께 ★★

[T1] · 명제 8.3 · 15분

C_1은 θ_1의 $1-\alpha_1$ 신뢰구간, C_2는 θ_2의 $1-\alpha_2$ 신뢰구간이다(같은 자료로 만들어 독립이 아닐 수 있다).

(a) $P(\theta_1 \in C_1,\ \theta_2 \in C_2) \ge 1-\alpha_1-\alpha_2$를 보여라.

(b) 두 구간이 독립이면 동시 포함확률은 얼마인가? (a)의 하한보다 큰지 확인하라.

(c) (a)의 등호가 성립하는 예를 하나 만들어라.

(d) m개의 구간을 각각 $1-\alpha/m$으로 만들면 동시 포함확률이 $1-\alpha$ 이상임을 결론지어라.

풀이 (a) $A_j=\{\theta_j \notin C_j\}$이면 De Morgan으로 $\{\theta_1\in C_1,\theta_2\in C_2\}^c = A_1\cup A_2$이고 Boole 부등식으로 $P(A_1\cup A_2)\le \alpha_1+\alpha_2$이다. (b) $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)=1-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_1\alpha_2$로 하한보다 $\alpha_1\alpha_2$만큼 크다. (c) $U\sim \mathrm{U}(0,1)$로 만든 두 "구간"이 각각 $U<\alpha_1$과 $U>1-\alpha_2$일 때 놓친다고 하자($\alpha_1+\alpha_2\le 1$). 두 놓침 사건은 서로소이므로 동시 포함확률은 정확히 $1-\alpha_1-\alpha_2$이다. 예컨대 같은 표본의 평균에 대한 아래쪽 한계와 위쪽 한계가 이렇다. (d) (a)를 m개로 넓히면(Boole 부등식) 놓칠 확률이 $m\cdot\alpha/m=\alpha$ 이하다.

C5 양쪽 z 검정은 불편이다 ★★

정리 3.4 · 20분

σ를 아는 정규 평균에서 $H_0:\mu=\mu_0$를 $|\bar X-\mu_0|\ge z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$일 때 기각한다. $d=\sqrt{n}(\mu-\mu_0)/\sigma$, $z=z_{\alpha/2}$로 둔다.

(a) 검정력 함수가 $\gamma(d)=\Phi(d-z)+\Phi(-d-z)$임을 보여라.

(b) γ가 d에 대해 짝함수이고 $\gamma(0)=\alpha$임을 보여라.

(c) $d>0$이면 $\gamma'(d)=\varphi(d-z)-\varphi(d+z)>0$임을 보이고, 모든 μ에서 $\gamma\ge\alpha$(불편성)를 결론지어라.

(d) $n=25$, $\sigma=10$, $\mu-\mu_0=5$, $\alpha=0.05$이면 검정력은?

풀이 (a) $Z=\sqrt{n}(\bar X-\mu)/\sigma\sim\mathcal{N}(0,1)$이면 기각 사건은 $|Z+d|\ge z$이고 확률은 $P(Z\ge z-d)+P(Z\le -z-d)=\Phi(d-z)+\Phi(-d-z)$이다. (b) d를 $-d$로 바꾸면 두 항이 자리를 바꾼다. $\gamma(0)=2\Phi(-z)=\alpha$이다. (c) 미분하면 $\varphi(d-z)-\varphi(-d-z)=\varphi(d-z)-\varphi(d+z)$이다. $d>0$, $z>0$이면 $|d-z|<d+z$이고 φ는 $|x|$가 클수록 작으므로 양수다. 따라서 γ는 $d=0$에서 최소이고 최솟값이 α이다. 한쪽 검정을 양쪽 대립가설에 쓰면 반대쪽에서 검정력이 α보다 작아지는 것과 대조된다. (d) $d=2.5$이므로 $\Phi(0.540)+\Phi(-4.46)\approx 0.7054$이다. 같은 차이에서 한쪽 검정(A11)의 0.804보다 작다.

최종답 (d) 0.7054

C6 복합 귀무가설의 p-값 ★★

정의 4.1, 정리 4.2 · 15분

정의 4.1의 $p(t) = \sup_{\theta\in\Omega_0} P_\theta(T \ge t)$에 대해 다음을 보여라.

(a) 모든 $\theta \in \Omega_0$에서 $p(t) \ge G_\theta(t) = P_\theta(T \ge t)$이다.

(b) $\{p(T) \le \alpha\} \subset \{G_\theta(T) \le \alpha\}$이고, 따라서 모든 $\theta \in \Omega_0$에서 $P_\theta(p(T) \le \alpha) \le \alpha$이다.

(c) 한쪽 z 검정($H_0 : \mu \le \mu_0$)에서 상한이 $\mu = \mu_0$에서 이루어짐을 보이고, $\mu < \mu_0$이면 $P_\mu(p \le \alpha) < \alpha$임을 보여라.

풀이 (a) 상한의 정의다. (b) $p(T) \le \alpha$이면 (a)로 $G_\theta(T) \le p(T) \le \alpha$이다. 정리 4.2(b)를 θ에서의 분포에 쓰면 $P_\theta(G_\theta(T) \le \alpha) \le \alpha$이므로 포함관계로 결론이 나온다. (c) $T = \bar X$이면 $P_\mu(\bar X \ge t)$는 μ에 대해 증가하므로 $\mu \le \mu_0$에서의 상한은 μ_0에서의 값이고, $p = 1 - \Phi\big(\sqrt{n}(\bar x - \mu_0)/\sigma\big)$이다. $p \le \alpha$는 $\bar X \ge \mu_0 + z_\alpha\sigma/\sqrt{n}$과 같고, 그 확률은 정리 3.4의 $\gamma(\mu)$이다. γ가 증가하므로 $\mu < \mu_0$이면 $\gamma(\mu) < \gamma(\mu_0) = \alpha$이다.

C7 X^2의 정확한 평균 ★

정리 5.1 · 15분

H_0가 참이고 n이 유한할 때 다음을 보여라.

(a) $X^2 = \sum_j \dfrac{N_j^2}{np_j^0} - n$.

(b) $E(N_j - np_j^0)^2 = np_j^0(1-p_j^0)$이고, 따라서 $EX^2 = k-1$이다.

(c) $\chi^2(k-1)$의 평균과 비교하라. (b)는 근사가 아니라 정확한 등식이다.

풀이 (a) $(N_j - np_j)^2/(np_j) = N_j^2/(np_j) - 2N_j + np_j$를 더하면 $\sum_j N_j = n$, $\sum_j p_j = 1$이므로 $\sum N_j^2/(np_j) - 2n + n$이다. (b) $N_j \sim \mathrm{b}(n, p_j)$이므로 $E(N_j - np_j)^2 = \operatorname{Var} N_j = np_j(1-p_j)$이고 $EX^2 = \sum_j (1-p_j) = k-1$이다. (c) $\chi^2(k-1)$의 평균도 $k-1$이다. 기대도수가 작을 때 근사가 나빠지는 것은 평균이 아니라 꼬리, 곧 분산과 높은 적률 때문이다(노트 7.4절).

C8 Wilson 구간은 $[0,1]$을 벗어나지 않는다 ★★

정리 3.5 · 15분

노트 예제 3.6의 Wilson 구간은 $W = \{p_0 : (\hat p - p_0)^2 \le \dfrac{z^2}{n} p_0(1-p_0)\}$이다.

(a) $W \subset [0,1]$임을 보여라.

(b) Wald 구간은 $[0,1]$을 벗어날 수 있다. $n = 20$, $\hat p = 0.05$에서 Wald 구간의 아래쪽 끝을 구하라($z = 1.96$).

(c) Wilson 구간의 중심 $\dfrac{\hat p + z^2/(2n)}{1 + z^2/n}$이 $\hat p$와 $\dfrac{1}{2}$ 사이에 있음을 보여라.

풀이 (a) $p_0 \notin [0,1]$이면 $p_0(1-p_0) < 0$이어서 오른쪽은 음수이고, 왼쪽은 0 이상이므로 부등식이 성립하지 않는다. 따라서 W의 점은 모두 $[0,1]$에 있다. (b) $0.05 - 1.96\sqrt{0.05\cdot 0.95/20} = 0.05 - 0.0955 = -0.0455$이다. 음수인 비율을 "덮는" 구간이다. (c) $w = \dfrac{1}{1+z^2/n}$이면 중심은

$w\hat{p}+(1-w)\frac{1}{2}$이다. $\frac{z^2/(2n)}{1+z^2/n}=(1-w)\frac{1}{2}$이기 때문이다. $0<w<1$이므로 두 점 사이에 있다.

최종답 (b) -0.0455

C9 Holm의 절차 ★★★

[T1] · 명제 8.3 · 25분

p-값 m개를 정렬해 $p_{(1)}\le\cdots\le p_{(m)}$이라 하자. Holm(1979)의 절차는 $p_{(i)}\le\frac{\alpha}{m-i+1}$이 $i=1,2,\dots$에서 성립하는 동안 차례로 기각하고, 처음 성립하지 않는 곳에서 멈춘다. 참인 귀무가설의 첨자 집합을 I_0, $m_0=|I_0|\ge 1$이라 하자.

(a) 참인 귀무가설 가운데 p-값이 가장 작은 것이 정렬에서 j번째이면 $j\le m-m_0+1$임을 보여라.

(b) 참인 귀무가설이 하나라도 기각되면 $\min_{i\in I_0}p_i\le\frac{\alpha}{m_0}$임을 보여라.

(c) (b)와 명제 8.3의 논리로 가족별 오류율이 어떤 의존 구조에서도 α 이하임을 보여라.

(d) p-값 0.004, 0.011, 0.02, 0.03, 0.4에 $\alpha=0.05$의 Holm을 쓰면 몇 개를 기각하는가?

(e) 같은 p-값에 $\alpha=0.05$의 Bonferroni를 쓰면 몇 개를 기각하는가?

풀이 (a) 참인 귀무가설의 p-값 m_0개는 모두 j번째 이후에 있으므로 $j+m_0-1\le m$이다. (b) Holm은 정렬 순서대로 기각하므로 참인 귀무가설이 하나라도 기각되면 그 가운데 가장 작은 것, 곧 j번째도 기각된다. j번째에서 기각되었으므로 $p_{(j)}\le\frac{\alpha}{m-j+1}\le\frac{\alpha}{m_0}$이다. 둘째 부등식은 (a)의 $m-j+1\ge m_0$이다. (c) (b)로 오류 사건은 $\bigcup_{i\in I_0}\{p_i\le\alpha/m_0\}$에 포함되고, Boole 부등식과 정리 4.2로 그 확률은 $m_0\cdot\frac{\alpha}{m_0}=\alpha$ 이하다. (d) 기준선 0.01, 0.0125, 0.0167, 0.025, 0.05와 비교하면 $0.004\le 0.01$, $0.011\le 0.0125$에서 기각하고 $0.02>0.0167$에서 멈추므로 2개다. (e) Bonferroni의 기준 0.01 아래는 0.004 하나다. Holm은 같은 보장을 하면서 언제나 Bonferroni 이상을 기각한다.

최종답 (d) 2 (e) 1

D

퀄형

여러 절과 앞 회차의 도구를 잇는 종합 문제다. 머리의 제한 시간을 재고, 노트를 덮고 푼다. 모형과 가정을 적는 것부터 답안의 일부다.

D1 균등분포 상한의 가장 짧은 구간 ★★★

정리 2.2 · 제한 35분

$X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0, \theta)$, $M = X_{(n)}$, $0 < \alpha < 1$이다.

(a) M/θ가 축량임을 보이고 그 분포함수를 구하라.

(b) $0 \le a < b \le 1$이고 $P(a \le M/\theta \le b) = 1 - \alpha$이면 $[M/b,\ M/a]$가 정확한 $1-\alpha$ 구간임을 보여라. 그 길이를 a, b로 써라.

(c) 제약 $b^n - a^n = 1 - \alpha$ 아래에서 길이를 가장 작게 하는 (a, b)가 $b = 1$, $a = \alpha^{1/n}$ 임을 보여라.

(d) $n = 5$, $M = 4.2$, $\alpha = 0.05$이면 가장 짧은 구간의 위쪽 끝은?

풀이 (a) $P(M/\theta \le x) = P(\text{모든 } X_i \le x\theta) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$은 θ와 무관하다. (b) $\{a \le M/\theta \le b\} = \{M/b \le \theta \le M/a\}$이므로(정리 2.2) 포함확률은 모든 θ에서 $1-\alpha$이다. 길이는 $M(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$이다. (c) $a(b)^n = b^n - (1-\alpha)$를 미분하면 $a' = b^{n-1}/a^{n-1}$이다. $L(b) = 1/a - 1/b$이면

$$L'(b) = -\frac{a'}{a^2} + \frac{1}{b^2} = -\frac{b^{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^{n+1} b^2} < 0$$

이다$(a < b)$. L이 감소하므로 허용되는 가장 큰 $b = 1$에서 최소이고, 그때 $a = \alpha^{1/n}$이다. 노트 연습 2.2의 구간 $[M,\ M\alpha^{-1/n}]$이 가장 짧다. (d) $4.2 \cdot 0.05^{-1/5} = 4.2 \cdot 1.8206 \approx 7.646$이다.

최종답 (d) $4.2 \cdot 0.05^{-1/5} \approx 7.646$

D2 지수 수명의 검정과 구간 ★★★

정리 3.4, 3.5, 4.2 · 4회 정리 3.7 · 제한 40분

수명이 평균 θ인 지수분포를 따르는 부품 n개를 검사한다. $H_0:\theta=\theta_0$ 대 $H_1:\theta<\theta_0$을 $T=2\sum X_i/\theta_0$로 검정한다.

(a) H_0 아래에서 $T\sim\chi^2(2n)$임을 보이고, $T\le\chi^2_{2n,1-\alpha}$일 때 기각하는 검정의 크기가 α임을 보여라.

(b) 검정력 함수가 $\gamma(\theta)=P\left(\chi^2(2n)\le\frac{\theta_0}{\theta}\chi^2_{2n,1-\alpha}\right)$임을 보여라. θ에 대해 어떻게 변하는가?

(c) 이 검정을 모든 θ_0에 대해 뒤집어 θ의 $1-\alpha$ 위쪽 신뢰한계를 만들어라.

(d) $n=10$, $\theta_0=1000$, $\sum x_i=6000$, $\alpha=0.05$이다($\chi^2_{20,0.95}=10.851$). 기각하는가? p-값($P(\chi^2(20)\le 12)=0.0839$), $\theta=500$에서의 검정력($P(\chi^2(20)\le 21.70)=0.643$), 위쪽 신뢰한계를 구하라.

풀이 (a) $X_i/\theta_0\sim\Gamma(1,1)$이므로 4회 정리 3.7로 $\sum X_i/\theta_0\sim\Gamma(n,1)$이고 $2\Gamma(n,1)=\chi^2(2n)$이다. 크기는 $P(\chi^2(2n)\le\chi^2_{2n,1-\alpha})=\alpha$이다. (b) 참값이 θ이면 $2\sum X_i/\theta\sim\chi^2(2n)$이고 $T=\frac{\theta}{\theta_0}\cdot 2\sum X_i/\theta$이므로 $P(T\le c)=P(\chi^2(2n)\le\frac{\theta_0}{\theta}c)$이다. θ가 작을수록 커진다. (c) 수락역은 $2\sum x_i/\theta_0>c$, 곧 $\theta_0<2\sum x_i/c$이다. 쌍대성(정리 3.5)으로 $\left(0,\ 2\sum X_i/\chi^2_{2n,1-\alpha}\right)$가 $1-\alpha$ 신뢰집합이다. (d) $T=12>10.851$이므로 기각하지 않는다. $p=P(\chi^2(20)\le 12)=0.0839$. 검정력은 $\gamma(500)=P(\chi^2(20)\le 2\cdot 10.851)=0.643$이다. 위쪽 한계는 $12000/10.851\approx 1106$시간이다. 평균 수명이 1000시간이라는 주장은 기각되지 않지만, 표본 10개로는 참 평균이 500시간이어도 셋에 하나꼴로 놓친다.

최종답 (a) 0.0839 (b) 0.643 (c) 1106

D3 지수분포의 중앙값 ★★★

정리 1.4, 2.6 · 제한 35분

$X_1,\dots,X_n$이 평균 θ인 지수분포를 따른다. 모집단의 중앙값을 m이라 하자.

(a) $m=\theta\log 2$임을 보여라.

(b) 정리 1.4로 표본중앙값의 점근분산을 구하라. 답을 $c\,\theta^2/n$으로 쓸 때 c는?

(c) 다른 추정량 $(\log 2)\bar X$의 분산을 구하고, 표본중앙값의 점근 상대효율 $\dfrac{\mathrm{Var}((\log 2)\bar X)}{\text{표본중앙값의 점근분산}}$을 구하라.

(d) 분포를 가정하지 않는 대칭 구간 $[X_{(i)},X_{(101-i)}]$로 $n=100$에서 신뢰계수 0.95 이상을 얻는 가장 큰 i는? (정리 2.6, 정규근사로 어림한 뒤 확인한다.)

(e) (d)의 구간의 정확한 신뢰계수는? ($K\sim\mathrm{b}(100,\frac12)$에서 $P(K\le 39)=0.0176$)

풀이 (a) $P(X\le m)=1-e^{-m/\theta}=\frac12$에서 $m=\theta\log 2$이다. (b) $p=\frac12$, $f(m)=\frac{1}{2\theta}$이므로 점근분산은 $\frac{p(1-p)}{n f(m)^2}=\frac{1/4}{n/(4\theta^2)}=\frac{\theta^2}{n}$, $c=1$이다. (c) $\mathrm{Var}((\log 2)\bar X)=(\log 2)^2\theta^2/n$이므로 상대효율은 $(\log 2)^2\approx 0.480$이다. 지수분포를 믿는다면 중앙값은 평균을 쓴 추정량의 절

반 정도의 효율이다. 대신 중앙값의 구간 (d)는 분포를 가정하지 않는다. (d) 정규근사로 $i \approx 50 - 9.8 = 40.2$이다. 정리 2.6으로 $i = 40$이면 $P(40 \le K \le 60) = 0.9648$, $i = 41$이면 0.9431이므로 $i = 40$, 구간은 $[X_{(40)}, X_{(61)}]$이다. (e) $1 - 2 \cdot 0.0176 = 0.9648$이다.

최종답 (b) θ^2/n (c) $(\log 2)^2 \approx 0.480$ (d) $i = 40$ (e) 0.9648

D4 Poisson 적합도와 자유도 ★★★

정리 5.1, 5.2절의 상자 · 제한 35분

한 시간 단위 200개에서 사건 수를 세었다. 0회 62, 1회 60, 2회 42, 3회 20, 4회 이상 16이고, 4회 이상인 16개는 모두 정확히 4회였다.

(a) 원자료의 평균으로 λ를 추정하라.

(b) 범주 0, 1, 2, 3, 4 이상의 기대도수를 구하고 Pearson X^2를 계산하라. (기대도수 52.37, 70.17, 47.02, 21.00, 9.44)

(c) 노트 5.2절의 규칙대로 자유도를 $5 - 1 - 1 = 3$으로 읽으면 p-값은? 모수를 추정하지 않은 것처럼 4로 읽으면? ($P(\chi^2(3) \ge 8.39) = 0.0386$, $P(\chi^2(4) \ge 8.39) = 0.0783$)

(d) λ를 범주로 묶기 전의 원자료로 추정했다. 이때 X^2의 참 극한분포는 어디에 있는가? 5% 수준의 결론에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

풀이 (a) 총수 $60 + 84 + 60 + 64 = 268$이므로 $\hat\lambda = 1.34$이다. (b) $200\, e^{-1.34} 1.34^k / k!$ ($k = 0, \dots, 3$)과 나머지 $200 - \sum$가 주어진 기대도수다. $X^2 = \frac{(62-52.37)^2}{52.37} + \frac{(60-70.17)^2}{70.17} + \frac{(42-47.02)^2}{47.02} + \frac{(20-21.00)^2}{21.00} + \frac{(16-9.44)^2}{9.44} \approx 1.77 + 1.47 + 0.54 + 0.05 + 4.56 = 8.39$이다. 0회와 4회 이상이 기대보다 많고 1회가 적다. 과대산포의 모양이다. (c) 자유도 3이면 $p = 0.0386$, 4이면 $p = 0.0783$이다. (d) 원자료로 추정하면 X^2의 극한은 $\chi^2(3)$과 $\chi^2(4)$ 사이에 있다(Chernoff–Lehmann). 따라서 참 p-값은 0.0386과 0.0783 사이에 있고, 5% 수준의 결론은 이 자료로 정해지지 않는다. 범주로 묶은 자료에서 최소 χ^2로 λ를 다시 추정하거나(그러면 자유도 3이 맞다), 추정까지 포함해 Monte Carlo 검정(노트 7.4절)으로 p-값을 직접 만들면 이 모호함이 없어진다.

최종답 (a) $\hat\lambda = 1.34$ (b) $X^2 = 8.39$ (c) 0.0386 (d) 0.0783