수리통계학 × 통계학의 역사

3회 워크북 — 풀이판

왜 평균을 내는가 손으로 푸는 34문항

학생판과 같은 문제에 빈칸의 답과 완전한 풀이를 붙였다. 학생판으로 먼저 풀고, 힌트와 최종답으로도 막힐 때 이 판을 본다.

부	하는 일	문항	예상 시간
A 계산 드릴	결합·조건부 분포, 공분산, 야코비안을 손으로 계산한다	14	1시간 52분
B 빈칸 증명	노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다	7	2시간 45분
C 증명 문제	변형, 일반화, 반례 만들기	9	2시간 55분
D 퀄형	여러 절을 잇는 종합 문제. 제한 시간 안에	4	2시간 30분
	합계	34	약 10시간

노트 `03_averaging_notes.pdf` — 문항의 "정리 2.6" 같은 번호는 노트의 번호다

도구 `00_toolkit_notes.pdf` — [T1] 원소 추적, [T2] 귀류와 반례, [T4] 부등식, [T6] 적분 순서 바꾸기, [T7] 변수변환

검산 노트북 `03_averaging.ipynb`의 "워크북 검산" 절: `check("A1a", "2/5")`

이 워크북을 쓰는 법

1. **노트를 덮고 푼다.** 문제의 머리 오른쪽에 쓸 도구, 관련 정리 번호, 예상 시간이 있다. 예상 시간의 두 배가 지나도 진척이 없으면 그때 노트를 편다.
2. **막히면 3단으로 본다.** 뒤의 **힌트와 최종답**에서 힌트를 먼저 본다. 다 푼 뒤에는 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나거나 증명이 막히면 풀이판을 본다.
3. **B부는 순서대로 푼다.** 같은 정리를 세 번 만난다. 처음에는 근거만 빈칸이고(①), 다음에는 단계의 이름만 있고(②), 마지막에는 전략만 있다(③). 앞 단계의 답을 보면서 다음 단계를 쓰지 않는다.
4. **영역을 먼저 그린다.** 결합밀도가 0이 아닌 영역, 변환한 뒤의 영역을 그림으로 그린 다음 적분의 끝점을 정한다. 이 회차 계산의 실수는 대부분 영역에서 나온다.
5. **계산은 검산한다.** 최종답이 수나 식인 문항은 노트북의 `check()`에 넣으면 맞는지만 알려 준다. 정답은 보여 주지 않는다.
6. **증명은 근거를 단다.** 등호와 부등호마다 어느 정의나 정리를 썼는지 오른쪽에 적는다. 적분의 순서를 바꿀 때는 Tonelli(음이 아닌 함수)인지 Fubini(절대적분이 유한)인지 밝힌다.

표시 ★ 정의를 바로 쓰는 문제, ★★ 두세 단계를 잇는 문제, ★★★ 퀄에 나오는 길이의 문제. [T1]–[T8]은 증명 도구 상자의 도구 번호다.

A

계산 드릴

결합분포에서 주변분포·조건부분포를 구하고, 공분산과 야코비안을 손으로 계산한다. 연속인 문제는 먼저 밀도가 0이 아닌 영역을 그린다. 다 풀면 뒤의 최종답이나 노트북의 `check()`로 맞춰 본다.

A1 결합분포표 ★

정리 1.3, 4.2 · 정의 2.1 · 8분

(X, Y)의 결합 확률질량함수가 다음 표와 같다.

$x\backslash y$	0	1	2
0	0.1	0.2	0.1
1	0.2	0.1	0.3

(a) $p_Y(2)$, (b) $E(XY)$, (c) $\mathrm{Cov}(X, Y)$, (d) $P(Y = 2 \mid X = 1)$을 구하라.

풀이 (a) 열의 합으로 $p_Y(2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$이다. (b) $E(XY) = 1 \cdot 1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 2 \cdot 0.3 = 0.7$이다. (c) $EX = p_X(1) = 0.6$, $EY = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.4 = 1.1$이므로 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0.7 - 0.66 = 0.04$이다. (d) $P(Y = 2 \mid X = 1) = 0.3/0.6 = \frac{1}{2}$이다. $p_Y(2) = 0.4$보다 크므로 $X = 1$은 Y가 2일 가능성을 높인다. 공분산이 양수인 것과 같은 방향이다.

최종답 (a) 0.4 (b) 0.7 (c) 0.04 (d) $\frac{1}{2}$

A2 정사각형 위의 기울어진 밀도 ★

정리 1.6, 4.2 · 8분

$f(x, y) = c(x + y)$ $(0 < x < 1,\ 0 < y < 1)$가 결합밀도이다. (a) c, (b) $f_X(x)$, (c) EX, (d) $\mathrm{Cov}(X, Y)$를 구하라.

풀이 (a) $\iint (x + y)\,dx\,dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$이므로 $c = 1$이다. (b) $f_X(x) = \int_0^1 (x + y)\,dy = x + \frac{1}{2}$ $(0 < x < 1)$. (c) $EX = \int_0^1 x(x + \frac{1}{2})\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. (d) $E(XY) = \iint (x^2 y + x y^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$이고, 대칭으로 $EY = \frac{7}{12}$이므로 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}$이다. 밀도가 $x + y$로 커지는데도 공분산은 음수다. 한쪽이 크면 밀도의 무게가 이미 커서 다른 쪽이 클 필요가 줄어든다.

최종답 (a) $c = 1$ (b) $x + \frac{1}{2}$ (c) $\frac{7}{12}$ (d) $-\frac{1}{144}$

A3 삼각형 위의 지수 밀도 ★★

정의 2.2, 정리 2.5 · 10분

$f(x,y)=e^{-y}$ $(0<x<y)$가 결합밀도이다. (a) $E(Y\mid X=x)$, (b) EY, (c) $\operatorname{Cov}(X,Y)$를 구하라.

풀이 (a) $f_X(x)=\int_x^\infty e^{-y}\,dy=e^{-x}$ $(x>0)$이므로 $X\sim\text{Exp}(1)$이다. $f(y\mid x)=e^{-y}/e^{-x}=e^{-(y-x)}$ $(y>x)$이므로 $X=x$일 때 $Y-x\sim\text{Exp}(1)$이고 $E(Y\mid X=x)=x+1$이다. (b) 반복기댓값으로 $EY=E(X+1)=2$이다. (c) $E(XY)=E[X(X+1)]=EX^2+EX=2+1=3$이므로 $\operatorname{Cov}(X,Y)=3-1\cdot 2=1$이다. $Y=X+W$이고 $W\sim\text{Exp}(1)$이 X와 독립이라 보아도 $\operatorname{Cov}(X,X+W)=\operatorname{Var}X=1$로 같다.

최종답 (a) $x+1$ (b) 2 (c) 1

A4 성공률이 무작위인 이항 ★★

정리 2.5, 2.6 · 8분

$P\sim\text{U}(0,1)$이고, $P=p$일 때 $K\sim\text{b}(10,p)$이다. (a) EK, (b) $\operatorname{Var}K$를 구하라. 성공률이 $\frac{1}{2}$로 고정된 $\text{b}(10,\frac{1}{2})$의 분산 2.5와 비교하라.

풀이 (a) 반복기댓값으로 $EK=E(10P)=5$이다. (b) 전분산 공식으로

$$\operatorname{Var}K=E\big[10P(1-P)\big]+\operatorname{Var}(10P)=10\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\frac{100}{12}=\frac{5}{3}+\frac{25}{3}=10.$$

성공률을 모르면 분산이 2.5에서 10으로 네 배가 된다. 늘어난 $\frac{25}{3}$이 성공률의 불확실성에서 온 몫이다. 실제로 K는 $\{0,1,\dots,10\}$ 위의 균등분포이고, 그 분산 $\frac{11^2-1}{12}=10$과 맞는다(노트북에서 확인할 수 있다).

최종답 (a) 5 (b) 10

A5 독립인 곱의 분산 ★

정리 3.4 · 6분

X와 Y가 독립이고 $EX=1$, $\operatorname{Var}X=2$, $EY=3$, $\operatorname{Var}Y=1$이다. (a) $\operatorname{Var}(XY)$, (b) $\operatorname{Cov}(XY,X)$를 구하라.

풀이 $EX^2=3$, $EY^2=10$이다. (a) 정리 3.4(b)로 $E(XY)^2=EX^2\,EY^2=30$, $E(XY)=3$이므로 $\operatorname{Var}(XY)=30-9=21$이다. 곱의 분산은 분산의 곱 2와 전혀 다르다. (b) $\operatorname{Cov}(XY,X)=E(X^2Y)-E(XY)\,EX=EX^2\,EY-3\cdot 1=9-3=6$이다.

최종답 (a) 21 (b) 6

A6 선형결합의 분산 ★

정리 4.2 · 8분

$\operatorname{Var} X = 4$, $\operatorname{Var} Y = 9$, $\operatorname{Corr}(X,Y) = -\frac{1}{3}$이다. (a) $\operatorname{Var}(2X - Y + 5)$, (b) $\operatorname{Cov}(X+Y, X-Y)$, (c) $\operatorname{Corr}(X+Y, X-Y)$를 구하라.

풀이 $\operatorname{Cov}(X,Y) = -\frac{1}{3}\cdot 2 \cdot 3 = -2$이다. (a) $4\cdot 4 + 9 - 2\cdot 2\cdot(-2) = 33$. 상수 5는 분산에 들어가지 않는다. (b) $\operatorname{Var} X - \operatorname{Var} Y = 4 - 9 = -5$. (c) $\operatorname{Var}(X+Y) = 4 + 9 - 4 = 9$, $\operatorname{Var}(X-Y) = 4 + 9 + 4 = 17$이므로 $\operatorname{Corr} = \frac{-5}{3\sqrt{17}} \approx -0.404$이다.

최종답 (a) 33 (b) -5 (c) $-\frac{5}{3\sqrt{17}} \approx -0.404$

A7 가장 좋은 직선 ★

정리 4.6 · 6분

$\mu_X = 2$, $\mu_Y = 5$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 3$, $\rho = 0.6$이다. X로 Y를 예측하는 가장 좋은 직선 $a^* + b^* X$의 (a) b^*, (b) a^*, (c) 최소 평균제곱오차, (d) $X = 3$일 때의 예측값을 구하라.

풀이 (a) $b^* = 0.6 \cdot 3/1 = 1.8$. (b) $a^* = 5 - 1.8\cdot 2 = 1.4$. (c) $9(1 - 0.36) = 5.76$. (d) $1.4 + 1.8\cdot 3 = 6.8$. 표준단위로 보면 X가 평균보다 1 표준편차 크면 예측은 평균보다 0.6 표준편차(1.8)만 크다.

최종답 (a) 1.8 (b) 1.4 (c) 5.76 (d) 6.8

A8 합과 차의 결합밀도 ★★

정리 5.1 · [T7] · 10분

$X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$이고 $U = X+Y$, $V = X-Y$이다. (a) 역변환의 야코비안 행렬식의 절댓값을 구하라. (b) V의 밀도 $f_V(v)$ $(-1 < v < 1)$를 구하라. (c) $P(U < 1,\ V > 0)$을 구하라.

풀이 (a) 역변환의 야코비안 행렬식은 $\det\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$이므로 절댓값은 $\frac{1}{2}$이다. (b) 정리 5.1로 $f_{U,V}(u,v) = 1\cdot\frac{1}{2}$ (영역 안)이다. $0<x<1$, $0<y<1$은 $|v| < u < 2-|v|$와 같으므로 $f_V(v) = \int_{|v|}^{2-|v|} \frac{1}{2}\,du = 1 - |v|$이다. 차의 밀도도 삼각형이다. (c) $\{U<1,\ V>0\} = \{X+Y<1,\ X>Y\}$는 꼭짓점이 $(0,0), (1,0), (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$인 삼각형이고 넓이가 $\frac{1}{4}$이므로 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

최종답 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $1 - |v|$ (c) $\frac{1}{4}$

A9 두 균등 난수의 거리 ★

정리 1.6 · 8분

$X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$이고 $D = |X - Y|$이다. $0 \le t \le 1$에서 $P(D > t)$를 넓이로 구한 뒤 (a) ED, (b) $P(D > \frac{1}{2})$를 구하라.

풀이 $\{D > t\} = \{X - Y > t\} \cup \{Y - X > t\}$는 빗변이 대각선과 평행한 두 직각삼각형이고 각각 넓이가 $\frac{1}{2}(1-t)^2$이므로 $P(D>t) = (1-t)^2$이다. (a) 꼬리 공식으로 $ED = \int_0^1 (1-t)^2\,dt = \frac{1}{3}$.

(b) $(1-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$. 밀도는 $2(1-t)$이다.

최종답 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$

A10 두 지수분포의 최솟값과 최댓값 ★

예제 3.5, 따름정리 1.9 · 8분

$X\sim\text{Exp}(1)$, $Y\sim\text{Exp}(2)$가 독립이다. (a) $E\min(X,Y)$, (b) $E\max(X,Y)$를 구하라.

풀이 (a) $P(\min(X,Y)>t)=e^{-t}e^{-2t}=e^{-3t}$이므로 $\min\sim\text{Exp}(3)$, 평균 $\frac{1}{3}$이다. (b) $\max+\min=X+Y$이고 선형성(따름정리 1.9)으로 $E\max=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$이다.

최종답 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{7}{6}$

A11 필요한 관측 수 ★

정리 6.3, 6.5 · 8분

한 관측의 표준편차가 $\sigma=10$이다. (a) 관측들이 상관이 없을 때, 평균의 표준오차가 0.5 이하가 되는 가장 작은 n은? (b) 모든 쌍의 상관이 $\rho=0.001$이면? (c) (b)에서 $n\to\infty$일 때 표준오차의 극한은?

풀이 (a) $10/\sqrt{n}\le 0.5\iff n\ge 400$. (b) $100\big(0.001+\frac{0.999}{n}\big)\le 0.25\iff\frac{99.9}{n}\le 0.15\iff n\ge 666$이다. 상관이 0.001뿐인데 필요한 관측이 1.67배가 된다. (c) $\sqrt{100\cdot 0.001}=\sqrt{0.1}\approx 0.316$이다. 이보다 작은 표준오차는 관측을 아무리 늘려도 얻지 못한다.

최종답 (a) 400 (b) 666 (c) $\sqrt{0.1}\approx 0.316$

A12 균등한 성공률로 두 번 던지기 ★★

정리 2.5 · 1회 정리 5.5 · 8분

$X\sim\text{U}(0,1)$이고, $X=x$일 때 $Y\sim\text{b}(2,x)$이다. (a) $P(Y=2)$, (b) $P(X>\frac{1}{2}\mid Y=2)$를 구하라.

풀이 (a) 반복기댓값을 지시함수 $\mathbf{1}\{Y=2\}$에 쓰면 $P(Y=2)=E\big[P(Y=2\mid X)\big]=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$이다. (b) 같은 방법으로 $P(X>\frac{1}{2},\,Y=2)=\int_{1/2}^1 x^2\,dx=\frac{7}{24}$이고, $P(X>\frac{1}{2}\mid Y=2)=\frac{7/24}{1/3}=\frac{7}{8}$이다. 두 번 모두 성공했다는 것을 알면 X의 조건부 밀도는 $3x^2$으로 1쪽에 몰린다.

최종답 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{7}{8}$

A13 정규 두 개를 극좌표로 ★

정리 5.3, 예제 5.2 · [T7] · 8분

$X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$이다. (a) $P(X^2+Y^2 \le 1)$, (b) $P(Y > |X|)$를 구하라.

풀이 극좌표로 $f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2}$이고, 인수분해로 $\Theta \sim \mathrm{U}(0,2\pi)$와 R은 독립이다. (a) $P(R \le 1) = \int_0^1 r e^{-r^2/2}\,dr = 1 - e^{-1/2} \approx 0.393$. (b) $\{Y > |X|\}$는 각 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$이므로 확률은 $\frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4}$이다.

최종답 (a) $1 - e^{-1/2} \approx 0.393$ (b) $\frac{1}{4}$

A14 길이가 다른 균등분포의 합 ★★

정리 5.5 · 8분

$X \sim \mathrm{U}(0,1)$, $Y \sim \mathrm{U}(0,2)$가 독립이고 $Z = X + Y$이다. (a) $f_Z(\frac{1}{2})$, (b) $f_Z(\frac{3}{2})$, (c) $P(Z \le 1)$을 구하라.

풀이 합성곱(정리 5.5)으로 $f_Z(z) = \frac{1}{2} \cdot |\{x \in (0,1) : z-2 < x < z\}|$이다. 길이는 $0 < z \le 1$에서 z, $1 < z \le 2$에서 1, $2 < z < 3$에서 $3 - z$이므로

$$f_Z(z) = \frac{z}{2}\ (0 < z \le 1), \qquad \frac{1}{2}\ (1 < z \le 2), \qquad \frac{3-z}{2}\ (2 < z < 3)$$

인 사다리꼴이다. (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{1}{2}$, (c) $\int_0^1 \frac{z}{2}\,dz = \frac{1}{4}$이다.

최종답 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$

B

빈칸 증명

노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다. 같은 정리를 여러 번 만나며 도움이 줄어든다. ① 단계는 주어지고 근거만 빈칸이다. ② 단계의 이름만 주어진다. ③ 전략만 주어진다. 근거에는 정의나 정리의 번호, 도구 번호를 쓴다.

B1 전분산 공식, 근거 채우기 ★

① · 정리 2.6 · 15분

$EY^2 < \infty$이면 $\operatorname{Var} Y = E\big[\operatorname{Var}(Y \mid X)\big] + \operatorname{Var}\big(E(Y \mid X)\big)$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $m(X) = E(Y \mid X)$로 두면 $Y - EY = \big(Y - m(X)\big) + \big(m(X) - EY\big)$이다. — 항등식

② $\operatorname{Var} Y = E(Y-m)^2 + E(m-EY)^2 + 2E\big[(Y-m)(m-EY)\big]$이다. — 제곱하고 선형성, 따름정리 1.9

③ $E(Y - m(X))^2 = E\big[\operatorname{Var}(Y \mid X)\big]$이다. — 정리 2.5를 $(Y-m(X))^2$에, 정의 2.4

④ $E(m(X) - EY)^2 = \operatorname{Var}\big(m(X)\big)$이다. — $E\,m(X) = EY$, 정리 2.5

⑤ $g(X) = m(X) - EY$로 두면 교차항 $E[g(X)Y] - E[g(X)m(X)] = 0$이다. — 정리 2.5의 둘째 식

⑥ 교차항의 기댓값이 존재한다: $E|g(X)Y| < \infty$. — $2|ab| \le a^2 + b^2$, $E\,m(X)^2 \le EY^2$

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 정리 2.6의 단계형 증명과 같다. 셋째 단계는 정리 2.5를 Y가 아니라 (X, Y)의 함수 $(Y - m(X))^2$에 쓴 것이다. 노트 정리 2.5의 조건 확인 단락이 이것을 허락한다. 마지막 단계의 $E\,m(X)^2 \le EY^2$는 정리 2.8의 첫 단계(조건부분포에 대한 $(EW)^2 \le EW^2$)에서 온다.

B2 합성곱 공식, 근거 채우기 ★★

① · 정리 5.5 · 20분

X, Y가 독립이고 밀도 f_X, f_Y를 가지면 $f_{X+Y}(z) = \int f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$이다. 근거를 채워라.

① $W = X$, $Z = X + Y$로 두면 $T(x, y) = (x, x+y)$는 $\mathbb{R}^2$에서 $\mathbb{R}^2$로 가는 일대일 변환이다.
보조 변수를 더해 변수의 수를 맞춘다

② 역변환은 $x = w$, $y = z - w$이고 야코비안 행렬식은 1이다. $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$, [T7]

③ $f_{W,Z}(w, z) = f_X(w)\, f_Y(z-w)$이다. 정리 5.1, 그리고 독립이므로 정리 3.2

④ $f_Z(z) = \int f_X(w)\, f_Y(z-w)\,dw$이다. 주변 밀도, 정리 1.6

⑤ 이산이면 $p_Z(z) = \sum_x p_X(x)\, p_Y(z-x)$이다. 서로소인 합집합과 (P3), 독립

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 정리 5.5의 단계형 증명과 같다. 보조 변수 없이 $(x, y) \mapsto x + y$만 쓰면 2차원에서 1차원으로 가는 변환이어서 정리 5.1을 쓸 수 없다. 보조 변수를 $W = Y$로 잡아도 같은 결론이 나온다($f_Z(z) = \int f_X(z-w) f_Y(w)\,dw$).

B3 Cauchy–Schwarz, 근거 채우기 ★

① · 정리 4.4 · 15분

$EX^2, EY^2 < \infty$이면 $\big(E(XY)\big)^2 \le EX^2 EY^2$이고, 등호는 $P(Y = cX) = 1$이거나 $P(X = 0) = 1$일 때뿐이다. 근거를 채워라.

① $E|XY| < \infty$이다. $2|XY| \le X^2 + Y^2$, [T4]

② $EX^2 = 0$이면 $P(X = 0) = 1$이고 양변이 0이다. 2회 따름정리 5.6

③ $EX^2 > 0$이면 모든 t에서 $0 \le E(Y - tX)^2 = EY^2 - 2tE(XY) + t^2 EX^2$이다.
제곱의 기댓값, 선형성

④ $4\big(E(XY)\big)^2 - 4EX^2 EY^2 \le 0$이다. 음이 아닌 이차식의 판별식 [T4]

⑤ 등호이면 $E(Y - cX)^2 = 0$인 c가 있어 $P(Y = cX) = 1$이다.
판별식이 0이면 중근, 2회 따름정리 5.6

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 정리 4.4의 단계형 증명과 같다. 둘째 단계를 따로 두는 이유는 넷째 단계의 판별식 논리가 이차항의 계수 EX^2가 양수일 때만 쓸 수 있기 때문이다.

B4 전분산 공식, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 2.6 · 25분

정리 2.6을 증명하라. 단계의 이름만 주어진다. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① $Y - EY$를 둘로 쪼갠다

② 제곱해 기댓값을 취한다

③ 첫 항을 조건부 분산의 평균으로 바꾼다

④ 둘째 항을 조건부 평균의 분산으로 바꾼다

⑤ **교차항이 0임을 보인다**

⑥ **교차항의 기댓값이 존재함을 확인한다**

풀이

① $Y - EY = (Y - m(X)) + (m(X) - EY)$, $m(X) = E(Y \mid X)$. — 항등식

② $\operatorname{Var} Y = E(Y-m)^2 + E(m-EY)^2 + 2E[(Y-m)(m-EY)]$. — 따름정리 1.9

③ $E(Y-m)^2 = E[E((Y-m)^2 \mid X)] = E\operatorname{Var}(Y \mid X)$. — 정리 2.5, 정의 2.4

④ $E\,m(X) = EY$이므로 $E(m-EY)^2 = \operatorname{Var} m(X)$. — 정리 2.5

⑤ $E[g(X)(Y-m(X))] = E[g(X)Y] - E[g(X)m(X)] = 0$. — 정리 2.5의 둘째 식

⑥ $E|g(X)Y| \le \frac{1}{2}(Eg^2 + EY^2) < \infty$. — [T4], 정리 2.8

B5 합성곱 공식, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 5.5 · 30분

정리 5.5를 연속인 경우와 이산인 경우 모두 증명하라. 단계의 이름만 주어진다.

① **보조 변수를 더해 일대일 변환을 만든다**

② **역변환과 야코비안 행렬식을 구한다**

③ **독립을 써서 새 변수들의 결합밀도를 쓴다**

④ **보조 변수를 적분해 없앤다**

⑤ **이산인 경우를 사건의 분할로 보인다**

풀이

① $W = X$, $Z = X + Y$. $T(x,y) = (x,\, x+y)$는 일대일. — 보조 변수

② $x = w$, $y = z - w$, $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$. — [T7]

③ $f_{W,Z}(w,z) = f_X(w) f_Y(z-w)$. — 정리 5.1, 3.2

④ $f_Z(z) = \int f_X(w) f_Y(z-w)\,dw$. — 정리 1.6

⑤ $\{Z=z\} = \bigcup_x \{X=x,\, Y=z-x\}$는 서로소이므로 $p_Z(z) = \sum_x p_X(x) p_Y(z-x)$. — (P3), 독립

B6 전분산 공식, 전략만 ★★

③ · 정리 2.6 · 30분

정리 2.6을 증명하라.

전략 $Y - EY$를 "조건부 평균에서 벗어난 부분"과 "조건부 평균이 전체 평균에서 벗어난 부분"으로 쪼개 제곱하고, 교차항을 반복기댓값으로 없앤다.

풀이 B4의 풀이와 같다. 반복기댓값은 세 번 쓰인다. 첫 항에서 첫째 식을 $(Y - m(X))^2$에, 둘째 항에서 첫째 식을 Y에, 교차항에서 둘째 식을 $g(X) = m(X) - EY$에 쓴다. 교차항이 0이라는 것은 $Y - m(X)$가 X의 모든 함수와 상관이 없다는 것이고, 노트 4.2절의 그림으로는 직교한다는 것이다. 그래서 전분산 공식은 피타고라스 정리다.

B7 Cauchy–Schwarz, 전략만 ★★

③ · 정리 4.4 · 30분

정리 4.4를 등호 조건까지 증명하라.

전략 모든 실수 t에서 $E(Y - tX)^2 \geq 0$이다. 이것을 t의 이차식으로 보고 판별식을 쓴다.

풀이 B3의 단계와 같다. 덧붙여 충분조건: $P(Y = cX) = 1$이면 $E(XY) = cEX^2$, $EY^2 = c^2EX^2$이므로 $(E(XY))^2 = c^2(EX^2)^2 = EX^2EY^2$이다. $P(X = 0) = 1$이면 양변이 0이다. 판별식 대신 $t^* = E(XY)/EX^2$를 직접 넣어도 된다. $0 \leq E(Y - t^*X)^2 = EY^2 - (E(XY))^2/EX^2$이 곧 부등식이다.

C

증명 문제

노트의 정리를 변형하고, 일반화하고, 반례로 경계를 확인한다. 증명은 노트의 단계형 모양으로 쓴다. 한 줄에 한 단계, 줄마다 근거.

C1 0과 1만 갖는 변수의 상관 ★★

[T2] · 정리 4.2 · 1회 정리 5.8 · 15분

X와 Y가 0과 1만 값으로 갖는다.

(a) $\mathrm{Cov}(X,Y) = P(X=1,Y=1) - P(X=1)P(Y=1)$임을 보여라.

(b) X와 Y가 상관이 없으면 독립임을 보여라.

(c) 세 값을 갖는 변수에서는 (b)가 성립하지 않음을 반례로 보여라.

풀이 (a) $XY = \mathbf{1}\{X=1,Y=1\}$이고 $EX = P(X=1)$, $EY = P(Y=1)$이므로 정리 4.2(a)에서 바로 나온다.

(b) (a)로 $P(A\cap B) = P(A)P(B)$이므로 사건 A, B는 독립이다. 1회 정리 5.8로 A와 B^c, A^c와 B, A^c와 B^c도 독립이다. 따라서 네 칸 모두 $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$이고, 2회 정의 2.6(이산에서 독립)으로 X, Y는 독립이다.

(c) X가 $\{-1,0,1\}$에서 같은 확률이고 $Y = X^2$이면 $\mathrm{Cov}(X,Y) = EX^3 - EX\,EX^2 = 0$이지만 $P(X=0,Y=1) = 0 \neq \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$이다. 0과 1만 갖는 변수에서는 분포가 평균 하나로 정해지므로 "함께 움직이는 정도"도 수 하나(공분산)로 다 드러난다. 값이 셋 이상이면 그렇지 않다.

C2 독립, 평균 독립, 상관없음 ★★

[T2] · 정리 2.5, 3.4 · 20분

$EX^2, EY^2 < \infty$라 하자. $E(Y\mid X) = EY$이면 Y가 X에 **평균 독립**이라 한다.

(a) 결합밀도가 있을 때, X, Y가 독립이면 평균 독립임을 보여라.

(b) 평균 독립이면 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$임을 보여라.

(c) 두 역이 모두 거짓임을 반례로 보여라. 평균 독립이지만 독립이 아닌 예와, 상관은 없지만 평균 독립이 아닌 예를 하나씩 만든다.

풀이 (a) 정리 3.2로 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$이므로 $f(y\mid x) = f_Y(y)$이고 $E(Y\mid X=x) = \int y f_Y(y)\,dy = EY$이다.

(b) 정리 2.5의 둘째 식으로 $E(XY) = E[X\,E(Y\mid X)] = E[X\,EY] = EX\,EY$이다. $E|XY| < \infty$는 $2|XY| \le X^2 + Y^2$에서 나온다.

(c) 첫째: X가 $\{1,2\}$에서 같은 확률이고, $X=x$일 때 $Y=\pm x$를 같은 확률로 가지면 $E(Y\mid X)=0=EY$이지만 $|Y|=X$이므로 독립이 아니다($P(X=1,Y=2)=0$). 둘째: $X\sim \mathrm{U}(-1,1)$, $Y=X^2$이면 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$(노트 예제 4.7)이지만 $E(Y\mid X)=X^2$은 상수가 아니다. 따라서 독립 ⇒ 평균 독립 ⇒ 상관없음이고, 어느 화살표도 거꾸로 성립하지 않는다.

C3 전공분산 공식 ★★

정리 2.5, 2.6 · 20분

$\mathrm{Cov}(X,Y\mid Z)=E\big[(X-E(X\mid Z))(Y-E(Y\mid Z))\mid Z\big]$로 정의한다. 모든 변수의 이차적률이 유한하다.

(a) 다음을 보여라.

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\big[\mathrm{Cov}(X,Y\mid Z)\big]+\mathrm{Cov}\big(E(X\mid Z),E(Y\mid Z)\big)$$

(b) $X=Y$이면 무엇이 되는가?

(c) $Z\sim\mathrm{U}(0,1)$이고, $Z=z$일 때 X와 Y가 서로 독립인 $\mathrm{Bernoulli}(z)$이다. $\mathrm{Cov}(X,Y)$를 구하라.

풀이 (a) $a(Z)=E(X\mid Z)$, $b(Z)=E(Y\mid Z)$로 두고 두 분해를 곱해 기댓값을 취하면 네 항이 나온다. (i) $E[(X-a)(Y-b)]=E[\mathrm{Cov}(X,Y\mid Z)]$ (정리 2.5를 $(X-a(Z))(Y-b(Z))$에). (ii) $E[(a-EX)(b-EY)]=\mathrm{Cov}(a(Z),b(Z))$ ($Ea(Z)=EX$, $Eb(Z)=EY$). (iii) $E[(X-a(Z))(b(Z)-EY)]=0$: 정리 2.5의 둘째 식을 X와 $g(Z)=b(Z)-EY$에 쓴다. (iv) 같은 이유로 $E[(a(Z)-EX)(Y-b(Z))]=0$이다. 기댓값의 존재는 $2|uv|\le u^2+v^2$와 정리 2.8의 $E\,a(Z)^2\le EX^2$에서 나온다.

(b) 전분산 공식(정리 2.6)이다.

(c) $Z=z$이면 X,Y가 독립이므로 $\mathrm{Cov}(X,Y\mid Z)=0$이다. $E(X\mid Z)=E(Y\mid Z)=Z$이므로 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Var}\,Z=\frac{1}{12}$이다. 성공률을 모르면 같은 성공률을 공유하는 두 시행은 양의 상관을 갖는다(1회 워크북 C5와 같은 구조).

최종답 (c) $\frac{1}{12}$

C4 서로의 조건부 평균이면 같다 ★★★

정리 2.5 · 2회 따름정리 5.6 · 30분

$EX^2,EY^2<\infty$이고 $E(Y\mid X)=X$, $E(X\mid Y)=Y$이다. $P(X=Y)=1$임을 보여라.

풀이

① $E|XY|<\infty$이다. — $2|XY|\le X^2+Y^2$ [T4]

② $E(XY)=E[X\,E(Y\mid X)]=EX^2$이다. — 정리 2.5의 둘째 식, $g(X)=X$

③ 같은 방법으로 Y에 조건을 걸면 $E(XY)=E[Y\,E(X\mid Y)]=EY^2$이다. — 정리 2.5

④ $E(X-Y)^2 = EX^2 - 2E(XY) + EY^2 = EX^2 - EX^2 - EY^2 + EY^2 = 0$이다. ②③

⑤ 음이 아닌 $(X-Y)^2$의 기댓값이 0이므로 $P(X=Y)=1$이다. 2회 따름정리 5.6

이차적률이 유한하다는 조건은 첫 단계와 넷째 단계에서 쓰인다. $E(XY)$와 EX^2이 유한해야 넷째 단계의 뺄셈이 뜻을 갖는다.

C5 같은 방향의 두 함수는 양의 상관 ★★

정리 3.4, 4.2 · 20분

g, h가 증가함수이고 $E\,g(X)^2,\ E\,h(X)^2 < \infty$이다. X'을 X와 독립이고 분포가 같은 확률변수라 하자.

(a) 모든 값에서 $\big(g(X)-g(X')\big)\big(h(X)-h(X')\big) \ge 0$임을 보여라.

(b) 그 기댓값이 $2\,\mathrm{Cov}\big(g(X), h(X)\big)$임을 보이고 $\mathrm{Cov}(g(X), h(X)) \ge 0$을 결론지어라.

(c) $U \sim \mathrm{U}(0,1)$이고 g가 증가함수이면 $\mathrm{Cov}\big(g(U), g(1-U)\big) \le 0$임을 보여라. 노트 연습 6.6에서 받아들인 사실이다.

풀이 (a) 증가함수이므로 $X \ge X'$이면 $g(X)-g(X') \ge 0$, $h(X)-h(X') \ge 0$이고, $X < X'$이면 둘 다 0 이하다. 곱은 언제나 0 이상이다.

(b) 전개하면 $E[g(X)h(X)] + E[g(X')h(X')] - E[g(X)h(X')] - E[g(X')h(X)]$이다. 앞의 두 항은 같은 분포이므로 같고, 뒤의 두 항은 독립이므로 정리 3.4(b)로 $Eg(X)\,Eh(X)$이다. 따라서 기댓값은 $2\big(E[g(X)h(X)] - Eg(X)Eh(X)\big) = 2\,\mathrm{Cov}(g(X), h(X))$이고, (a)로 0 이상이다. 각 항의 기댓값이 존재하는 것은 $2|ab| \le a^2 + b^2$에서 나온다.

(c) $h(u) = -g(1-u)$는 증가함수이므로 (b)로 $\mathrm{Cov}(g(U), -g(1-U)) \ge 0$, 곧 $\mathrm{Cov}(g(U), g(1-U)) \le 0$이다. 이 부등식을 Chebyshev의 합 부등식의 확률판이라 한다. 독립인 복사본 X'을 하나 더 만드는 것이 증명의 수단이다.

C6 양수일 확률의 하한 ★★

[T4] · 정리 4.4 · 15분

$X \ge 0$이고 $0 < EX^2 < \infty$이다.

(a) $P(X>0) \ge \dfrac{(EX)^2}{EX^2}$임을 보여라.

(b) 등호는 언제 성립하는가?

(c) $X \sim \mathrm{b}(10, 0.1)$에서 (a)의 하한을 구하고 정확한 값 $1-0.9^{10}$과 비교하라.

풀이 (a) $X \ge 0$이므로 $X = X\,\mathbf{1}\{X>0\}$이다. 정리 4.4로 $(EX)^2 = \big(E[X\,\mathbf{1}\{X>0\}]\big)^2 \le EX^2 \cdot E\,\mathbf{1}\{X>0\}^2 = EX^2\,P(X>0)$이다.

(b) 정리 4.4의 등호 조건으로 $\mathbf{1}\{X>0\} = cX$가 확률 1로 성립해야 한다. 곧 X가 0이 아닌 값을 가질 때 그 값이 하나의 상수 $1/c$뿐이다. X가 $\{0, a\}$ 위의 분포일 때 등호다.

(c) $EX = 1$, $EX^2 = \operatorname{Var} X + (EX)^2 = 0.9 + 1 = 1.9$이므로 하한은 $\frac{1}{1.9} = \frac{10}{19} \approx 0.526$이고, 정확한 값은 $1 - 0.9^{10} \approx 0.651$이다. Chebyshev 부등식은 꼬리의 위쪽 한계를 주고, 이 부등식은 0이 아닐 확률의 아래쪽 한계를 준다.

최종답 (c) $\frac{10}{19} \approx 0.526$

C7 정규분포의 회전 ★★

[T7] · 정리 3.2, 5.1, 따름정리 5.9 · 20분

$X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$이다.

(a) $U = (X+Y)/\sqrt{2}$, $V = (X-Y)/\sqrt{2}$의 결합밀도를 구해 U, V가 독립인 $\mathcal{N}(0,1)$임을 보여라.

(b) 일반적으로 각 θ만큼의 회전 $(U, V) = (X\cos\theta - Y\sin\theta,\ X\sin\theta + Y\cos\theta)$에 대해서도 같은 결론이 나옴을 보여라.

(c) $X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$이면 $X+Y$와 $X-Y$는 상관이 없지만 독립이 아님을 보여라.

풀이 (a)(b) $(U,V)' = A(X,Y)'$이고 A는 회전행렬이므로 $A^{-1} = A'$, $|\det A| = 1$이다. 따름정리 5.9로 $f_{U,V}(\mathbf{u}) = f_{X,Y}(A'\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi} e^{-\|A'\mathbf{u}\|^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}$이다. 회전은 길이를 바꾸지 않기 때문이다. 이것은 $\phi(u)\phi(v)$이므로 정리 3.2로 U, V는 독립인 $\mathcal{N}(0,1)$이다. (a)의 (U,V)는 $\theta = \frac{\pi}{4}$의 회전에서 두 좌표의 순서를 바꾼 것이다.

(c) 분산이 같으므로 $\operatorname{Cov}(X+Y, X-Y) = \operatorname{Var} X - \operatorname{Var} Y = 0$이다. A8에서 $(X+Y, X-Y)$의 영역은 기울어진 정사각형이고 곱의 꼴이 아니다. 예를 들어 $X+Y < 0.2$이면 $|X-Y| < 0.2$여야 하므로 $P(X+Y < 0.2,\ X-Y > 0.5) = 0$이지만 두 사건의 확률은 각각 양수다. 결합밀도가 원점 중심으로 회전에 불변인 것이 정규분포의 특별한 성질이다.

C8 지수분포의 합과 비율 ★★

[T7] · 정리 3.2, 5.1 · 20분

$X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$이고 $S = X+Y$, $B = X/(X+Y)$이다.

(a) 역변환과 그 야코비안 행렬식을 구하라.

(b) (S, B)의 결합밀도를 구하고, S와 B가 독립이며 $B \sim \mathrm{U}(0,1)$임을 보여라.

(c) $P(X > 2Y)$를 (b)로 구하라.

풀이 (a) $T(x,y) = (x+y,\ x/(x+y))$는 $(0,\infty)^2$에서 $(0,\infty)\times(0,1)$로 가는 일대일 변환이고 역변환은 $x = bs$, $y = (1-b)s$이다. $\det\left(\begin{smallmatrix} b & s \\ 1-b & -s \end{smallmatrix}\right) = -bs - (1-b)s = -s$.

(b) 정리 5.1로 $f_{S,B}(s,b) = \lambda e^{-\lambda bs}\,\lambda e^{-\lambda(1-b)s} \cdot s = \lambda^2 s e^{-\lambda s} \cdot \mathbf{1}\{0 < b < 1\}$이다. 영역이 곱의 꼴이고 밀도가 s의 함수와 b의 함수의 곱이므로 정리 3.2로 독립이고, $B \sim \mathrm{U}(0,1)$, S의 밀도는 $\lambda^2 s e^{-\lambda s}$(노트 예제 5.7)이다.

(c) $\{X > 2Y\} = \{B > \frac{2}{3}\}$이므로 $\frac{1}{3}$이다. λ에 의존하지 않는다. 두 대기시간의 합이 주어지면 그 합이 둘로 나뉘는 비율은 균등하다.

최종답 (c) $\frac{1}{3}$

C9 가장 좋은 예측은 하나뿐이다 ★

정리 2.5, 2.8 · 15분

$EY^2 < \infty$이고 $m(X) = E(Y \mid X)$이다.

(a) $E\,g(X)^2 < \infty$인 모든 g에서 $E\big[(Y - m(X))\,g(X)\big] = 0$임을 보여라.

(b) 거꾸로 어떤 함수 $\tilde{m}$이 $E\,\tilde{m}(X)^2 < \infty$이고 모든 그런 g에서 $E\big[(Y - \tilde{m}(X))\,g(X)\big] = 0$이면 $P\big(\tilde{m}(X) = m(X)\big) = 1$임을 보여라.

(c) 정리 2.8의 부등식에서 등호가 성립하는 g는 무엇인가?

풀이 (a) 정리 2.5의 둘째 식으로 $E[g(X)Y] = E[g(X)m(X)]$이다. 기댓값의 존재는 $2|ab| \le a^2 + b^2$와 정리 2.8의 $E\,m(X)^2 \le EY^2$에서 나온다.

(b) $g = \tilde{m} - m$은 $E\,g^2 < \infty$이다. 가정에서 $E[(Y - \tilde{m})g] = 0$, (a)에서 $E[(Y - m)g] = 0$이므로 빼면 $E[(m - \tilde{m})g] = -E(\tilde{m} - m)^2 = 0$이다. 2회 따름정리 5.6으로 $P(\tilde{m}(X) = m(X)) = 1$이다.

(c) 정리 2.8의 분해에서 $E(m(X) - g(X))^2 = 0$일 때, 곧 확률 1로 $g(X) = m(X)$일 때뿐이다. (a)의 성질을 "잔차 $Y - m(X)$는 X의 모든 함수와 직교한다"로 읽으면, (b)는 그 성질이 m을 하나로 정한다는 말이다.

D

퀄형

여러 절의 도구를 잇는 종합 문제다. 머리의 제한 시간을 재고, 노트를 덮고 푼다. 영역을 그리는 것과 변환을 정하는 것부터 답안의 일부다.

D1 막대를 세 조각으로 ★★★

정리 4.2, 5.1 · 1회 정리 4.5 · 제한 40분

길이 1인 막대의 두 점 $U_1, U_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$에서 자른다. 세 조각의 길이를 왼쪽부터 $L_1 = \min(U_1,U_2)$, $L_2 = \max(U_1,U_2) - \min(U_1,U_2)$, $L_3 = 1 - \max(U_1,U_2)$라 하자.

(a) (L_1, L_2)의 결합밀도가 삼각형 $\{l_1 > 0,\ l_2 > 0,\ l_1 + l_2 < 1\}$ 위에서 상수 2임을 보여라.

(b) 세 조각으로 삼각형을 만들 수 있을 확률을 구하라.

(c) $\mathrm{Corr}(L_1, L_3)$을 구하라.

(d) 가장 긴 조각의 길이의 기댓값을 구하라.

풀이 (a) (U_1,U_2)는 정사각형 위에서 균등하다. $u<v$인 점 (u,v)로 가는 (U_1,U_2)는 (u,v)와 (v,u) 두 개이므로 $(\min,\max)$의 밀도는 $\{u<v\}$에서 2다. $(l_1,l_2) = (u,\ v-u)$의 역변환 $(u,v) = (l_1,\ l_1+l_2)$의 야코비안 행렬식은 1이므로(정리 5.1) (L_1,L_2)의 밀도는 삼각형 위에서 2다.

(b) 세 조각으로 삼각형을 만들 필요충분조건은 가장 긴 조각이 나머지 둘의 합보다 짧은 것, 곧 모든 조각이 $\frac{1}{2}$보다 짧은 것이다. (l_1,l_2) 평면에서 $l_1 < \frac{1}{2}$, $l_2 < \frac{1}{2}$, $l_1 + l_2 > \frac{1}{2}$는 넓이 $\frac{1}{8}$의 삼각형이므로 확률은 $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$이다.

(c) $(l_1,l_2) \mapsto (l_1,\ 1-l_1-l_2)$는 삼각형을 자기 자신으로 보내고 야코비안의 절댓값이 1이므로 (L_1,L_3)도 같은 밀도 2를 갖는다. 같은 논리로 세 조각은 같은 분포를 갖고 모든 쌍의 공분산이 같다. $V = \mathrm{Var}\,L_i$, $C = \mathrm{Cov}(L_i,L_j)$로 두면 $0 = \mathrm{Var}(L_1+L_2+L_3) = 3V + 6C$(정리 4.2(c))이므로 $C = -\frac{V}{2}$, $\mathrm{Corr}(L_1,L_3) = -\frac{1}{2}$이다.

(d) $a,b,c \ge 0$, $a+b+c<1$이면 $\{L_1>a,\ L_2>b,\ L_3>c\}$는 (l_1,l_2) 평면에서 처음 삼각형과 닮은 변의 길이 $1-a-b-c$인 삼각형이므로 확률은 $2\cdot\frac{1}{2}(1-a-b-c)^2 = (1-a-b-c)^2$이다. 포함배제로

$$P(\max_i L_i > t) = 3(1-t)^2 - 3(1-2t)_+^2 + (1-3t)_+^2,$$

$x_+ = \max(x,0)$이다. 꼬리 공식으로 $E\max_i L_i = \int_0^1 P(\max > t)\,dt = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18} \approx 0.611$이다. $t = \frac{1}{2}$을 넣으면 $P(\max > \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$로 (b)와 맞는다.

최종답 (b) $\frac{1}{4}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{11}{18} \approx 0.611$

D2 두 정규변수가 함께 양수일 확률 ★★★

정리 2.5, 2.6, 5.3, 따름정리 5.9 · 제한 40분

$Z_1, Z_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $|\rho| < 1$이고 $X = Z_1$, $Y = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_2$이다.

(a) (X, Y)의 결합밀도가 다음과 같음을 보여라.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\!\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

(b) $X = x$일 때 Y의 조건부분포가 $\rho x + \sqrt{1-\rho^2}\, Z$ ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$)의 분포임을 보이고, $E(Y \mid X)$, $\operatorname{Var} Y$, $\operatorname{Corr}(X, Y)$를 구하라.

(c) (Z_1, Z_2)의 극좌표를 써서 $P(X > 0,\ Y > 0)$을 ρ의 식으로 구하라.

(d) $\rho = \frac{1}{2}$이면 (c)의 값은 얼마인가?

풀이 (a) $(X,Y)' = A(Z_1,Z_2)'$, $\det A = \sqrt{1-\rho^2}$, $A^{-1}(x,y)' = \left(x,\ \frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)'$이다. 따름정리 5.9로

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \exp\!\left(-\frac{1}{2}\left[x^2 + \frac{(y-\rho x)^2}{1-\rho^2}\right]\right)$$

이고, 대괄호 안을 통분하면 $\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}$이다.

(b) $f(y \mid x) = f(x,y)/\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\!\left(-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}\right)$이다. 이것은 $\rho x + \sqrt{1-\rho^2} Z$의 밀도(2회 정리 4.3)다. 따라서 $E(Y \mid X) = \rho X$, $\operatorname{Var}(Y \mid X) = 1 - \rho^2$이고, 전분산 공식으로 $\operatorname{Var} Y = (1-\rho^2) + \rho^2 = 1$이다. $E(XY) = E[X \cdot \rho X] = \rho$(정리 2.5)이므로 $\operatorname{Corr}(X,Y) = \rho$이다.

(c) $Z_1 = R\cos\Theta$, $Z_2 = R\sin\Theta$이면 $\Theta \sim \mathrm{U}(0, 2\pi)$이고 $R > 0$이다(정리 5.4의 증명). $X > 0 \iff \cos\Theta > 0 \iff \Theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (각을 $(-\pi, \pi]$로 잡는다). $Y = R\sin(\Theta + \alpha)$, $\alpha = \arcsin\rho \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$이므로 $Y > 0 \iff \Theta \in (-\alpha, \pi - \alpha)$이다. 두 구간의 교집합은 $(-\alpha, \frac{\pi}{2})$이고 길이는 $\frac{\pi}{2} + \alpha$이므로

$$P(X > 0,\ Y > 0) = \frac{\pi/2 + \arcsin\rho}{2\pi} = \frac{1}{4} + \frac{\arcsin\rho}{2\pi}.$$

(d) $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$이므로 $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$이다. $\rho = 0$이면 $\frac{1}{4}$(독립), $\rho \to 1$이면 $\frac{1}{2}$이다. 이 식을 Sheppard(1899)의 공식이라 한다.

최종답 (c) $\frac{1}{4} + \frac{\arcsin\rho}{2\pi}$ (d) $\frac{1}{3}$

D3 최솟값과 최댓값의 상관 ★★★

정의 1.1, 정리 3.2의 방법, 예제 3.5 · 제한 40분

$X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$ $(n \ge 2)$, $L = \min_i X_i$, $M = \max_i X_i$이다.

(a) $0 < l < m < 1$에서 $P(L > l,\ M \le m) = (m-l)^n$임을 보이고, (L, M)의 결합밀도가 $n(n-1)(m-l)^{n-2}$ $(0 < l < m < 1)$임을 보여라.

(b) $E(M - L)$을 구하라.

(c) $\mathrm{Cov}(L, M)$과 $\mathrm{Corr}(L, M)$을 구하라.

(d) $n = 3$이면 $\mathrm{Corr}(L, M)$은 얼마인가?

풀이 (a) $\{L > l, M \le m\}$은 모든 X_i가 $(l, m]$에 있는 사건이므로 독립으로 $(m-l)^n$이다. $F_{L,M}(l,m) = P(M \le m) - P(L > l, M \le m) = m^n - (m-l)^n$이고, m으로 미분하면 $nm^{n-1} - n(m-l)^{n-1}$, 다시 l로 미분하면 $n(n-1)(m-l)^{n-2}$이다. 이 함수를 적분하면 $F_{L,M}$이 다시 나오므로 결합밀도다.

(b) $EM = \frac{n}{n+1}$(예제 3.5)이고, $1 - X_i$도 iid 균등이므로 L은 $1 - M$과 분포가 같아 $EL = \frac{1}{n+1}$이다. $E(M - L) = \frac{n-1}{n+1}$이다.

(c) $\int_0^m l(m-l)^{n-2} dl = m^n \int_0^1 s(1-s)^{n-2} ds = \frac{m^n}{n(n-1)}$이므로

$$E(LM) = \int_0^1 m \cdot n(n-1) \cdot \frac{m^n}{n(n-1)}\, dm = \frac{1}{n+2}.$$

$\mathrm{Cov}(L, M) = \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$이다. $\mathrm{Var}\, M = EM^2 - (EM)^2 = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$이고 $\mathrm{Var}\, L = \mathrm{Var}\, M$이므로 $\mathrm{Corr}(L, M) = \frac{1}{n}$이다.

(d) $\frac{1}{3}$이다. 표본이 커지면 최솟값과 최댓값은 거의 상관이 없어진다. 두 극값은 표본의 반대쪽 끝에서 정해지기 때문이다.

최종답 (b) $\frac{n-1}{n+1}$ (c) $\mathrm{Cov} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$, $\mathrm{Corr} = \frac{1}{n}$ (d) $\frac{1}{3}$

D4 상관된 관측의 가장 좋은 가중평균 ★★★

[T4] · 정리 4.4, 6.2, 6.5 · 제한 30분

$X_1, \dots, X_n$의 평균이 모두 μ, 분산이 모두 σ^2이고 모든 쌍의 상관이 $\rho < 1$이다. $\sum_i a_i = 1$인 가중평균 $\mathbf{a}'\mathbf{X}$를 생각한다.

(a) $E(\mathbf{a}'\mathbf{X}) = \mu$이고 $\mathrm{Var}(\mathbf{a}'\mathbf{X}) = \sigma^2\big[(1-\rho)\sum_i a_i^2 + \rho\big]$임을 보여라.

(b) 분산을 가장 작게 하는 가중치는 $a_i = \frac{1}{n}$, 곧 표본평균임을 보여라.

(c) $n = 10$, $\sigma = 1$, $\rho = 0.2$일 때 최소 분산을 구하라.

(d) $\mathrm{Var}\,\bar{X} \ge 0$에서 $\rho \ge -\frac{1}{n-1}$임을 보여라. 노트 연습 6.2의 3×3 경우를 일반화한 것이다.

풀이 (a) 선형성으로 $E(\mathbf{a}'\mathbf{X}) = \mu \sum a_i = \mu$이다. 공분산행렬은 $\Sigma = \sigma^2[(1-\rho)I + \rho \mathbf{1}\mathbf{1}']$이므로 정리 6.2로 $\mathrm{Var}(\mathbf{a}'\mathbf{X}) = \sigma^2[(1-\rho)\mathbf{a}'\mathbf{a} + \rho(\mathbf{1}'\mathbf{a})^2] = \sigma^2[(1-\rho)\sum a_i^2 + \rho]$이다.

(b) $1-\rho>0$이므로 $\sum a_i^2$을 가장 작게 하면 된다. Cauchy–Schwarz(정리 4.4를 합에 쓴 것, [T4])로 $1=(\sum_i a_i\cdot 1)^2\le n\sum_i a_i^2$이고, 등호는 a_i가 모두 같을 때, 곧 $a_i=\frac{1}{n}$일 때뿐이다. 그때의 분산은 $\sigma^2\big(\rho+\frac{1-\rho}{n}\big)$로 정리 6.5와 같다.
(c) $0.2+\frac{0.8}{10}=0.28$이다.
(d) $\operatorname{Var}\bar X=\sigma^2\big(\rho+\frac{1-\rho}{n}\big)\ge 0$을 정리하면 $\rho(n-1)\ge -1$, 곧 $\rho\ge -\frac{1}{n-1}$이다. $n=3$이면 $-\frac{1}{2}$이다. 관측이 많을수록 모두가 서로 음의 상관을 갖기는 어렵다.

최종답 (c) 0.28