수리통계학 × 통계학의 역사

**3회 워크북**

# 왜 평균을 내는가<br>손으로 푸는 34문항

강의노트 3회를 읽은 뒤 손으로 푼다. 결합밀도의 영역을 그리고, 적분의 순서를 정하고, 야코비안을 계산하는 일은 눈으로 따라가서는 익지 않는다. 문제 아래의 줄친 공간에 직접 쓴다.

| 부 | 하는 일 | 문항 | 예상 시간 |
|---|---|---|---|
| **A 계산 드릴** | 결합·조건부 분포, 공분산, 야코비안을 손으로 계산한다 | 14 | 1시간 52분 |
| **B 빈칸 증명** | 노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다 | 7 | 2시간 45분 |
| **C 증명 문제** | 변형, 일반화, 반례 만들기 | 9 | 2시간 55분 |
| **D 퀄형** | 여러 절을 잇는 종합 문제. 제한 시간 안에 | 4 | 2시간 30분 |
| | 합계 | 34 | 약 10시간 |

**노트** `03_averaging_notes.pdf` — 문항의 "정리 2.6" 같은 번호는 노트의 번호다

**도구** `00_toolkit_notes.pdf` — [T1] 원소 추적, [T2] 귀류와 반례, [T4] 부등식, [T6] 적분 순서 바꾸기, [T7] 변수변환

**검산** 노트북 `03_averaging.ipynb`의 "워크북 검산" 절: `check("A1a", "2/5")`

## 이 워크북을 쓰는 법

1. **노트를 덮고 푼다.** 문제의 머리 오른쪽에 쓸 도구, 관련 정리 번호, 예상 시간이 있다. 예상 시간의 두 배가 지나도 진척이 없으면 그때 노트를 편다.
2. **막히면 3단으로 본다.** 뒤의 **힌트와 최종답**에서 힌트를 먼저 본다. 다 푼 뒤에는 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나거나 증명이 막히면 풀이판을 본다.
3. **B부는 순서대로 푼다.** 같은 정리를 세 번 만난다. 처음에는 근거만 빈칸이고(①), 다음에는 단계의 이름만 있고(②), 마지막에는 전략만 있다(③). 앞 단계의 답을 보면서 다음 단계를 쓰지 않는다.
4. **영역을 먼저 그린다.** 결합밀도가 0이 아닌 영역, 변환한 뒤의 영역을 그림으로 그린 다음 적분의 끝점을 정한다. 이 회차 계산의 실수는 대부분 영역에서 나온다.
5. **계산은 검산한다.** 최종답이 수나 식인 문항은 노트북의 `check()`에 넣으면 맞는지만 알려 준다. 정답은 보여 주지 않는다.
6. **증명은 근거를 단다.** 등호와 부등호마다 어느 정의나 정리를 썼는지 오른쪽에 적는다. 적분의 순서를 바꿀 때는 Tonelli(음이 아닌 함수)인지 Fubini(절대적분이 유한)인지 밝힌다.

**표시** ★ 정의를 바로 쓰는 문제, ★★ 두세 단계를 잇는 문제, ★★★ 퀄에 나오는 길이의 문제. [T1]–[T8]은 증명 도구 상자의 도구 번호다.

**예: 빈칸과 풀이 공간**

① $X, Y$가 독립이면 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$이다. 왜? _____

# A

# 계산 드릴

결합분포에서 주변분포·조건부분포를 구하고, 공분산과 야코비안을 손으로 계산한다. 연속인 문제는 먼저 밀도가 0이 아닌 영역을 그린다. 다 풀면 뒤의 최종답이나 노트북의 `check()`로 맞춰 본다.

### A1 결합분포표 ★

정리 1.3, 4.2 · 정의 2.1 · 8분

$(X, Y)$의 결합 확률질량함수가 다음 표와 같다.

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0.1 |
| 1 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

(a) $p_Y(2)$, (b) $E(XY)$, (c) $\mathrm{Cov}(X, Y)$, (d) $P(Y = 2 \mid X = 1)$을 구하라.

### A2 정사각형 위의 기울어진 밀도 ★

정리 1.6, 4.2 · 8분

$f(x, y) = c(x + y)$ $(0 < x < 1,\ 0 < y < 1)$가 결합밀도이다. (a) $c$, (b) $f_X(x)$, (c) $EX$, (d) $\mathrm{Cov}(X, Y)$를 구하라.

### A3 삼각형 위의 지수 밀도 ★★

정의 2.2, 정리 2.5 · 10분

$f(x,y) = e^{-y}$ $(0 < x < y)$가 결합밀도이다. (a) $E(Y \mid X = x)$, (b) $EY$, (c) $\mathrm{Cov}(X,Y)$를 구하라.

### A4 성공률이 무작위인 이항 ★★

정리 2.5, 2.6 · 8분

$P \sim \mathrm{U}(0,1)$이고, $P = p$일 때 $K \sim \mathrm{b}(10,p)$이다. (a) $EK$, (b) $\mathrm{Var}\,K$를 구하라. 성공률이 $\frac{1}{2}$로 고정된 $\mathrm{b}(10,\frac{1}{2})$의 분산 2.5와 비교하라.

### A5 독립인 곱의 분산 ★

정리 3.4 · 6분

$X$와 $Y$가 독립이고 $EX = 1$, $\mathrm{Var}\,X = 2$, $EY = 3$, $\mathrm{Var}\,Y = 1$이다. (a) $\mathrm{Var}(XY)$, (b) $\mathrm{Cov}(XY, X)$를 구하라.

### A6 선형결합의 분산 ★

정리 4.2 · 8분

$\operatorname{Var} X = 4$, $\operatorname{Var} Y = 9$, $\operatorname{Corr}(X, Y) = -\frac{1}{3}$이다. (a) $\operatorname{Var}(2X - Y + 5)$, (b) $\operatorname{Cov}(X + Y, X - Y)$, (c) $\operatorname{Corr}(X + Y, X - Y)$를 구하라.

### A7 가장 좋은 직선 ★

정리 4.6 · 6분

$\mu_X = 2$, $\mu_Y = 5$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 3$, $\rho = 0.6$이다. $X$로 $Y$를 예측하는 가장 좋은 직선 $a^* + b^* X$의 (a) $b^*$, (b) $a^*$, (c) 최소 평균제곱오차, (d) $X = 3$일 때의 예측값을 구하라.

### A8 합과 차의 결합밀도 ★★

정리 5.1 · [T7] · 10분

$X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$이고 $U = X + Y$, $V = X - Y$이다. (a) 역변환의 야코비안 행렬식의 절댓값을 구하라. (b) $V$의 밀도 $f_V(v)$ $(-1 < v < 1)$를 구하라. (c) $P(U < 1,\ V > 0)$을 구하라.

### A9 두 균등 난수의 거리 ★

정리 1.6 · 8분

$X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$이고 $D = |X - Y|$이다. $0 \le t \le 1$에서 $P(D > t)$를 넓이로 구한 뒤 (a) $ED$, (b) $P(D > \frac{1}{2})$를 구하라.

### A10 두 지수분포의 최솟값과 최댓값 ★

예제 3.5, 따름정리 1.9 · 8분

$X \sim \mathrm{Exp}(1)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(2)$가 독립이다. (a) $E\min(X,Y)$, (b) $E\max(X,Y)$를 구하라.

### A11 필요한 관측 수 ★

정리 6.3, 6.5 · 8분

한 관측의 표준편차가 $\sigma = 10$이다. (a) 관측들이 상관이 없을 때, 평균의 표준오차가 0.5 이하가 되는 가장 작은 $n$은? (b) 모든 쌍의 상관이 $\rho = 0.001$이면? (c) (b)에서 $n \to \infty$일 때 표준오차의 극한은?

### A12 균등한 성공률로 두 번 던지기 ★★

정리 2.5 · 1회 정리 5.5 · 8분

$X \sim \mathrm{U}(0,1)$이고, $X = x$일 때 $Y \sim \mathrm{b}(2, x)$이다. (a) $P(Y = 2)$, (b) $P(X > \frac{1}{2} \mid Y = 2)$를 구하라.

### A13 정규 두 개를 극좌표로 ★

정리 5.3, 예제 5.2 · [T7] · 8분

$X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$이다. (a) $P(X^2 + Y^2 \le 1)$, (b) $P(Y > |X|)$를 구하라.

### A14 길이가 다른 균등분포의 합 ★★

정리 5.5 · 8분

$X \sim \mathrm{U}(0,1)$, $Y \sim \mathrm{U}(0,2)$가 독립이고 $Z = X + Y$이다. (a) $f_Z(\frac{1}{2})$, (b) $f_Z(\frac{3}{2})$, (c) $P(Z \le 1)$을 구하라.

# B

# 빈칸 증명

노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다. 같은 정리를 여러 번 만나며 도움이 줄어든다. ① 단계는 주어지고 근거만 빈칸이다. ② 단계의 이름만 주어진다. ③ 전략만 주어진다. 근거에는 정의나 정리의 번호, 도구 번호를 쓴다.

### B1 전분산 공식, 근거 채우기 ★

① · 정리 2.6 · 15분

$EY^2 < \infty$이면 $\operatorname{Var} Y = E\big[\operatorname{Var}(Y \mid X)\big] + \operatorname{Var}\big(E(Y \mid X)\big)$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $m(X) = E(Y \mid X)$로 두면 $Y - EY = \big(Y - m(X)\big) + \big(m(X) - EY\big)$이다. 항등식

② $\operatorname{Var} Y = E(Y-m)^2 + E(m-EY)^2 + 2E\big[(Y-m)(m-EY)\big]$이다.

왜? _____

③ $E(Y-m(X))^2 = E\big[\operatorname{Var}(Y \mid X)\big]$이다. 왜? _____

④ $E(m(X)-EY)^2 = \operatorname{Var}\big(m(X)\big)$이다. 왜? _____

⑤ $g(X) = m(X) - EY$로 두면 교차항 $E[g(X)Y] - E[g(X)m(X)] = 0$이다.

왜? _____

⑥ 교차항의 기댓값이 존재한다: $E|g(X)Y| < \infty$. 왜? _____

### B2 합성곱 공식, 근거 채우기 ★★

① · 정리 5.5 · 20분

$X, Y$가 독립이고 밀도 $f_X, f_Y$를 가지면 $f_{X+Y}(z) = \int f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$이다. 근거를 채워라.

① $W = X$, $Z = X + Y$로 두면 $T(x,y) = (x, x+y)$는 $\mathbb{R}^2$에서 $\mathbb{R}^2$로 가는 일대일 변환이다.

왜? _____

② 역변환은 $x = w$, $y = z - w$이고 야코비안 행렬식은 $1$이다. 왜? _____

③ $f_{W,Z}(w,z) = f_X(w)\, f_Y(z-w)$이다. 왜? _____

④ $f_Z(z) = \int f_X(w)\, f_Y(z-w)\,dw$이다. 왜? _____

⑤ 이산이면 $p_Z(z) = \sum_x p_X(x)\, p_Y(z-x)$이다. 왜? _____

### B3 Cauchy–Schwarz, 근거 채우기 ★

① · 정리 4.4 · 15분

$EX^2, EY^2 < \infty$이면 $\big(E(XY)\big)^2 \le EX^2 EY^2$이고, 등호는 $P(Y = cX) = 1$이거나 $P(X = 0) = 1$일 때뿐이다. 근거를 채워라.

① $E|XY| < \infty$이다. 왜? _____

② $EX^2 = 0$이면 $P(X = 0) = 1$이고 양변이 0이다. 왜? _____

③ $EX^2 > 0$이면 모든 $t$에서 $0 \le E(Y - tX)^2 = EY^2 - 2tE(XY) + t^2 EX^2$이다.
왜? _____

④ $4\big(E(XY)\big)^2 - 4EX^2 EY^2 \le 0$이다. 왜? _____

⑤ 등호이면 $E(Y - cX)^2 = 0$인 $c$가 있어 $P(Y = cX) = 1$이다. 왜? _____

### B4 전분산 공식, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 2.6 · 25분

정리 2.6을 증명하라. 단계의 이름만 주어진다. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① **$Y - EY$를 둘로 쪼갠다**

② **제곱해 기댓값을 취한다**

③ **첫 항을 조건부 분산의 평균으로 바꾼다**

④ **둘째 항을 조건부 평균의 분산으로 바꾼다**

⑤ **교차항이 0임을 보인다**

⑥ **교차항의 기댓값이 존재함을 확인한다**

### B5 합성곱 공식, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 5.5 · 30분

정리 5.5를 연속인 경우와 이산인 경우 모두 증명하라. 단계의 이름만 주어진다.

① **보조 변수를 더해 일대일 변환을 만든다**

② **역변환과 야코비안 행렬식을 구한다**

③ **독립을 써서 새 변수들의 결합밀도를 쓴다**

④ **보조 변수를 적분해 없앤다**

⑤ **이산인 경우를 사건의 분할로 보인다**

**B6 전분산 공식, 전략만 ★★** ③ · 정리 2.6 · 30분

정리 2.6을 증명하라.

**전략** $Y - EY$를 "조건부 평균에서 벗어난 부분"과 "조건부 평균이 전체 평균에서 벗어난 부분"으로 쪼개 제곱하고, 교차항을 반복기댓값으로 없앤다.

**B7 Cauchy–Schwarz, 전략만 ★★** ③ · 정리 4.4 · 30분

정리 4.4를 등호 조건까지 증명하라.

**전략** 모든 실수 $t$에서 $E(Y-tX)^2 \geq 0$이다. 이것을 $t$의 이차식으로 보고 판별식을 쓴다.

# C

# 증명 문제

노트의 정리를 변형하고, 일반화하고, 반례로 경계를 확인한다. 증명은 노트의 단계형 모양으로 쓴다. 한 줄에 한 단계, 줄마다 근거.

### C1 0과 1만 갖는 변수의 상관 ★★

[T2] · 정리 4.2 · 1회 정리 5.8 · 15분

$X$와 $Y$가 0과 1만 값으로 갖는다.

(a) $\mathrm{Cov}(X,Y) = P(X=1,Y=1) - P(X=1)P(Y=1)$임을 보여라.

(b) $X$와 $Y$가 상관이 없으면 독립임을 보여라.

(c) 세 값을 갖는 변수에서는 (b)가 성립하지 않음을 반례로 보여라.

### C2 독립, 평균 독립, 상관없음 ★★

[T2] · 정리 2.5, 3.4 · 20분

$EX^2, EY^2 < \infty$라 하자. $E(Y \mid X) = EY$이면 $Y$가 $X$에 **평균 독립**이라 한다.

(a) 결합밀도가 있을 때, $X, Y$가 독립이면 평균 독립임을 보여라.

(b) 평균 독립이면 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$임을 보여라.

(c) 두 역이 모두 거짓임을 반례로 보여라. 평균 독립이지만 독립이 아닌 예와, 상관은 없지만 평균 독립이 아닌 예를 하나씩 만든다.

### C3 전공분산 공식 ★★

정리 2.5, 2.6 · 20분

$\mathrm{Cov}(X, Y \mid Z) = E\big[(X - E(X \mid Z))(Y - E(Y \mid Z)) \mid Z\big]$로 정의한다. 모든 변수의 이차적률이 유한하다.

(a) 다음을 보여라.

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big[\mathrm{Cov}(X, Y \mid Z)\big] + \mathrm{Cov}\big(E(X \mid Z),\, E(Y \mid Z)\big)$$

(b) $X = Y$이면 무엇이 되는가?

(c) $Z \sim \mathrm{U}(0,1)$이고, $Z = z$일 때 $X$와 $Y$가 서로 독립인 $\mathrm{Bernoulli}(z)$이다. $\mathrm{Cov}(X, Y)$를 구하라.

### C4 서로의 조건부 평균이면 같다 ★★★

정리 2.5 · 2회 따름정리 5.6 · 30분

$EX^2, EY^2 < \infty$이고 $E(Y \mid X) = X$, $E(X \mid Y) = Y$이다. $P(X = Y) = 1$임을 보여라.

### C5 같은 방향의 두 함수는 양의 상관 ★★

정리 3.4, 4.2 · 20분

$g, h$가 증가함수이고 $E\,g(X)^2,\ E\,h(X)^2 < \infty$이다. $X'$을 $X$와 독립이고 분포가 같은 확률변수라 하자.

(a) 모든 값에서 $\big(g(X) - g(X')\big)\big(h(X) - h(X')\big) \geq 0$임을 보여라.

(b) 그 기댓값이 $2\,\mathrm{Cov}\big(g(X), h(X)\big)$임을 보이고 $\mathrm{Cov}(g(X), h(X)) \geq 0$을 결론지어라.

(c) $U \sim \mathrm{U}(0,1)$이고 $g$가 증가함수이면 $\mathrm{Cov}\big(g(U), g(1-U)\big) \leq 0$임을 보여라. 노트 연습 6.6에서 받아들인 사실이다.

### C6 양수일 확률의 하한 ★★

[T4] · 정리 4.4 · 15분

$X \geq 0$이고 $0 < EX^2 < \infty$이다.

(a) $P(X > 0) \geq \dfrac{(EX)^2}{EX^2}$임을 보여라.

(b) 등호는 언제 성립하는가?

(c) $X \sim \mathrm{b}(10,\, 0.1)$에서 (a)의 하한을 구하고 정확한 값 $1 - 0.9^{10}$과 비교하라.

### C7 정규분포의 회전 ★★

[T7] · 정리 3.2, 5.1, 따름정리 5.9 · 20분

$X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$이다.

(a) $U = (X+Y)/\sqrt{2}$, $V = (X-Y)/\sqrt{2}$의 결합밀도를 구해 $U, V$가 독립인 $\mathcal{N}(0,1)$임을 보여라.

(b) 일반적으로 각 $\theta$만큼의 회전 $(U, V) = (X\cos\theta - Y\sin\theta,\ X\sin\theta + Y\cos\theta)$에 대해서도 같은 결론이 나옴을 보여라.

(c) $X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$이면 $X+Y$와 $X-Y$는 상관이 없지만 독립이 아님을 보여라.

### C8 지수분포의 합과 비율 ★★

[T7] · 정리 3.2, 5.1 · 20분

$X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$이고 $S = X + Y$, $B = X/(X+Y)$이다.

(a) 역변환과 그 야코비안 행렬식을 구하라.

(b) $(S, B)$의 결합밀도를 구하고, $S$와 $B$가 독립이며 $B \sim \text{U}(0,1)$임을 보여라.

(c) $P(X > 2Y)$를 (b)로 구하라.

### C9 가장 좋은 예측은 하나뿐이다 ★

정리 2.5, 2.8 · 15분

$EY^2 < \infty$이고 $m(X) = E(Y \mid X)$이다.

(a) $E\,g(X)^2 < \infty$인 모든 $g$에서 $E\big[(Y - m(X))\,g(X)\big] = 0$임을 보여라.

(b) 거꾸로 어떤 함수 $\tilde{m}$이 $E\,\tilde{m}(X)^2 < \infty$이고 모든 그런 $g$에서 $E\big[(Y - \tilde{m}(X))\,g(X)\big] = 0$이면 $P\big(\tilde{m}(X) = m(X)\big) = 1$임을 보여라.

(c) 정리 2.8의 부등식에서 등호가 성립하는 $g$는 무엇인가?

# D

# 퀄형

여러 절의 도구를 잇는 종합 문제다. 머리의 제한 시간을 재고, 노트를 덮고 푼다. 영역을 그리는 것과 변환을 정하는 것부터 답안의 일부다.

### D1 막대를 세 조각으로 ★★★

정리 4.2, 5.1 · 1회 정리 4.5 · 제한 40분

길이 1인 막대의 두 점 $U_1, U_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$에서 자른다. 세 조각의 길이를 왼쪽부터 $L_1 = \min(U_1, U_2)$, $L_2 = \max(U_1, U_2) - \min(U_1, U_2)$, $L_3 = 1 - \max(U_1, U_2)$라 하자.

(a) $(L_1, L_2)$의 결합밀도가 삼각형 $\{l_1 > 0,\ l_2 > 0,\ l_1 + l_2 < 1\}$ 위에서 상수 2임을 보여라.

(b) 세 조각으로 삼각형을 만들 수 있을 확률을 구하라.

(c) $\mathrm{Corr}(L_1, L_3)$을 구하라.

(d) 가장 긴 조각의 길이의 기댓값을 구하라.

### D2 두 정규변수가 함께 양수일 확률 ★★★

정리 2.5, 2.6, 5.3, 따름정리 5.9 · 제한 40분

$Z_1, Z_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $|\rho| < 1$이고 $X = Z_1$, $Y = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_2$이다.

(a) $(X, Y)$의 결합밀도가 다음과 같음을 보여라.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\!\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

(b) $X = x$일 때 $Y$의 조건부분포가 $\rho x + \sqrt{1-\rho^2}\, Z$ ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$)의 분포임을 보이고, $E(Y \mid X)$, $\operatorname{Var} Y$, $\operatorname{Corr}(X, Y)$를 구하라.

(c) $(Z_1, Z_2)$의 극좌표를 써서 $P(X > 0,\ Y > 0)$을 $\rho$의 식으로 구하라.

(d) $\rho = \frac{1}{2}$이면 (c)의 값은 얼마인가?

### D3 최솟값과 최댓값의 상관 ★★★

정의 1.1, 정리 3.2의 방법, 예제 3.5 · 제한 40분

$X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$ $(n \geq 2)$, $L = \min_i X_i$, $M = \max_i X_i$ 이다.

(a) $0 < l < m < 1$ 에서 $P(L > l,\ M \leq m) = (m-l)^n$ 임을 보이고, $(L, M)$ 의 결합밀도가 $n(n-1)(m-l)^{n-2}$ $(0 < l < m < 1)$ 임을 보여라.

(b) $E(M-L)$ 을 구하라.

(c) $\mathrm{Cov}(L, M)$ 과 $\mathrm{Corr}(L, M)$ 을 구하라.

(d) $n = 3$ 이면 $\mathrm{Corr}(L, M)$ 은 얼마인가?

### D4 상관된 관측의 가장 좋은 가중평균 ★★★

[T4] · 정리 4.4, 6.2, 6.5 · 제한 30분

$X_1, \dots, X_n$의 평균이 모두 $\mu$, 분산이 모두 $\sigma^2$이고 모든 쌍의 상관이 $\rho < 1$이다. $\sum_i a_i = 1$인 가중평균 $\mathbf{a}'\mathbf{X}$를 생각한다.

(a) $E(\mathbf{a}'\mathbf{X}) = \mu$이고 $\mathrm{Var}(\mathbf{a}'\mathbf{X}) = \sigma^2\big[(1-\rho)\sum_i a_i^2 + \rho\big]$임을 보여라.

(b) 분산을 가장 작게 하는 가중치는 $a_i = \dfrac{1}{n}$, 곧 표본평균임을 보여라.

(c) $n = 10$, $\sigma = 1$, $\rho = 0.2$일 때 최소 분산을 구하라.

(d) $\mathrm{Var}\,\bar{X} \geq 0$에서 $\rho \geq -\dfrac{1}{n-1}$임을 보여라. 노트 연습 6.2의 $3 \times 3$ 경우를 일반화한 것이다.

# 힌트와 최종답

막히면 먼저 힌트를 보고, 다 푼 뒤에 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나면 풀이판을 본다. 최종답은 노트북의 `check()`로도 확인할 수 있다.

**A1** 힌트 주변분포는 행과 열의 합이다(정리 1.3). $E(XY)$에서 0이 아닌 항은 $x=1,\ y\ge 1$인 칸뿐이다. $\mathrm{Cov} = E(XY) - EX\,EY$(정리 4.2(a)).

답 (a) 0.4 (b) 0.7 (c) 0.04 (d) $\frac{1}{2}$

**A2** 힌트 $\iint (x+y) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. 대칭이므로 $EY = EX$이다. $E(XY) = \iint xy(x+y)\,dx\,dy$.

답 (a) $c=1$ (b) $x+\frac{1}{2}$ (c) $\frac{7}{12}$ (d) $-\frac{1}{144}$

**A3** 힌트 $f_X(x) = \int_x^\infty e^{-y}dy$. $X=x$일 때 $Y-x$의 분포를 알아보라. (c)는 $E(XY) = E[X\,E(Y\mid X)]$로 계산한다(정리 2.5의 둘째 식).

답 (a) $x+1$ (b) 2 (c) 1

**A4** 힌트 $E(K\mid P) = 10P$, $\mathrm{Var}(K\mid P) = 10P(1-P)$ (2회 정리 2.4). 전분산 공식.

답 (a) 5 (b) 10

**A5** 힌트 $EX^2 = \mathrm{Var}\,X + (EX)^2$. 정리 3.4(b)를 $g(x)=x^2$, $h(y)=y^2$에 쓴다.

답 (a) 21 (b) 6

**A6** 힌트 먼저 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$. 쌍선형으로 전개한다(정리 4.2(b)(c)).

답 (a) 33 (b) $-5$ (c) $-\frac{5}{3\sqrt{17}} \approx -0.404$

**A7** 힌트 $b^* = \rho\sigma_Y/\sigma_X$, $a^* = \mu_Y - b^*\mu_X$, 최솟값 $\sigma_Y^2(1-\rho^2)$.

답 (a) 1.8 (b) 1.4 (c) 5.76 (d) 6.8

**A8** 힌트 역변환은 $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$이다. $(u,v)$ 평면에서 영역은 꼭짓점이 $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(1,-1)$인 정사각형이다. $v$를 고정하면 $u$는 $|v|$에서 $2-|v|$까지 움직인다.

답 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $1-|v|$ (c) $\frac{1}{4}$

**A9** 힌트 $\{D>t\}$는 정사각형에서 대각선 양쪽의 직각삼각형 두 개다. 각각의 넓이는 $\frac{1}{2}(1-t)^2$이다. $ED = \int_0^1 P(D>t)\,dt$ (2회 정리 1.13).

답 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$

**A10** 힌트 $P(\min > t) = P(X > t)P(Y > t)$. 최댓값은 $\max + \min = X + Y$를 쓰면 적분하지 않아도 된다.

답 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{7}{6}$

**A11** 힌트 (b) $\operatorname{Var}\bar{X} = \sigma^2\left(\rho + \frac{1-\rho}{n}\right) \le 0.25$를 $n$에 대해 푼다.

답 (a) 400 (b) 666 (c) $\sqrt{0.1} \approx 0.316$

**A12** 힌트 $P(Y = 2 \mid X = x) = x^2$. (a)는 이것을 $X$의 분포로 평균한다. (b)는 $P(X > \frac{1}{2},\ Y = 2) = \int_{1/2}^{1} x^2\,dx$를 (a)로 나눈다.

답 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{7}{8}$

**A13** 힌트 극좌표에서 결합밀도는 $\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}r$이고, 반지름과 각이 독립이다. (b)는 각의 범위만 본다.

답 (a) $1 - e^{-1/2} \approx 0.393$ (b) $\frac{1}{4}$

**A14** 힌트 $f_Z(z) = \int_0^1 \frac{1}{2}\mathbf{1}\{0 < z - x < 2\}\,dx$. 적분 구간의 길이를 $z$의 구간별로 구한다.

답 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$

**B1** 힌트 반복기댓값(정리 2.5)이 세 번 쓰인다. 첫째 식 $E[E(\cdot \mid X)] = E(\cdot)$, 그리고 둘째 식 $E[g(X)E(Y \mid X)] = E[g(X)Y]$.

**B2** 힌트 정리 5.1을 쓰려면 변환이 일대일이어야 하고, 그래서 보조 변수가 필요하다. 셋째 단계는 결합밀도를 주변 밀도의 곱으로 쓰는 곳이다.

**B3** 힌트 2회 따름정리 5.6은 "음이 아닌 확률변수의 기댓값이 0이면 그 변수는 확률 1로 0"이다.

**B4** 힌트 B1에서 채운 근거를 다시 보지 말고 쓴다. 교차항에서는 $g(X) = m(X) - EY$를 $X$의 함수로 보는 것이 열쇠다.

**B5** 힌트 B2를 다시 보지 말고 쓴다. 넷째 단계는 주변 밀도(정리 1.6)이고, 다섯째 단계는 $\{Z = z\}$를 $X$의 값으로 나눈다.

**B6** 힌트 단계는 여섯이다. 다 쓴 뒤, 반복기댓값을 몇 번 썼는지, 각각 첫째 식인지 둘째 식인지 확인한다.

**B7** 힌트 $EX^2 = 0$인 경우를 먼저 따로 처리한다. 등호 조건은 두 방향(필요와 충분)을 모두 보인다.

**C1** 힌트 (b) 사건 $A=\{X=1\}$과 $B=\{Y=1\}$이 독립이면 여사건들도 독립이다(1회 정리 5.8). 결합 확률질량함수의 네 칸이 모두 인수분해되는지 본다. (c) 노트 예제 4.7을 이산으로 바꾼다.

**C2** 힌트 (a) 독립이면 조건부 밀도가 주변 밀도와 같다. (b) $E(XY)=E[X\,E(Y\mid X)]$. (c) 첫째 예: $X=x$일 때 $Y$가 $\pm x$를 같은 확률로 갖게 한다.

**C3** 힌트 (a) 전분산 공식의 증명을 그대로 따른다. $X-EX=(X-a(Z))+(a(Z)-EX)$, $Y-EY=(Y-b(Z))+(b(Z)-EY)$로 쪼개 곱하면 네 항이 나온다. (c) 조건부 공분산은 0이다.

답 (c) $\frac{1}{12}$

**C4** 힌트 $E(X-Y)^2=EX^2-2E(XY)+EY^2$이다. $E(XY)$를 두 가지로 계산한다. 한 번은 $X$에 조건을 걸고, 한 번은 $Y$에 조건을 건다.

**C5** 힌트 (a) $X\ge X'$이면 두 인수가 모두 0 이상이고, $X<X'$이면 모두 0 이하다. (b) 전개하면 네 항이고, 독립인 두 항은 곱으로 갈라진다(정리 3.4(b)). (c) $h(u)=-g(1-u)$는 증가함수다.

**C6** 힌트 $X=X\cdot\mathbf{1}\{X>0\}$에 Cauchy–Schwarz를 쓴다. $E\,\mathbf{1}\{X>0\}^2=P(X>0)$.

답 (c) $\frac{10}{19}\approx 0.526$

**C7** 힌트 회전행렬 $A$는 $A'A=I$이고 $|\det A|=1$이다. 따름정리 5.9로 $f_{U,V}(\mathbf{u})=f_{X,Y}(A'\mathbf{u})$이고, $\|A'\mathbf{u}\|=\|\mathbf{u}\|$이다. (c)는 A8의 영역을 쓴다.

**C8** 힌트 $x=bs$, $y=(1-b)s$이다. 야코비안 행렬식의 절댓값은 $s$이다. 영역은 $s>0$, $0<b<1$의 곱의 꼴이다.

답 (c) $\frac{1}{3}$

**C9** 힌트 (b) $g=\tilde{m}-m$을 (a)와 가정에 넣고 두 식을 뺀다.

**D1** 힌트 (a) $(\min,\max)$의 밀도는 $u<v$에서 2이고, $(l_1,l_2)=(u,v-u)$의 야코비안은 1이다. (b) 삼각형을 만들 조건은 세 조각이 모두 $\frac{1}{2}$보다 짧은 것이다. (c) 세 조각은 대칭이고 합이 1이다. (d) $P(L_1>a,L_2>b,L_3>c)=(1-a-b-c)^2$ $(a+b+c<1)$을 넓이로 보이고, $\{\max>t\}$에 포함배제를 쓴다.

답 (b) $\frac{1}{4}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{11}{18}\approx 0.611$

**D2** 힌트 (a) 따름정리 5.9를 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \rho & \sqrt{1-\rho^2}\end{pmatrix}$에 쓴다. (c) $\Theta$가 균등하다. $\rho\cos\theta+\sqrt{1-\rho^2}\sin\theta=$

$\sin(\theta+\alpha)$, $\alpha=\arcsin\rho$로 쓰면 두 조건이 $\theta$의 구간이 된다.

답 (c) $\frac{1}{4}+\frac{\arcsin\rho}{2\pi}$ (d) $\frac{1}{3}$

**D3** 힌트 (a) $F_{L,M}(l,m)=P(M\le m)-P(L>l,M\le m)$을 $l$과 $m$으로 미분한다. (c) $E(LM)$의 안쪽 적분은 $l=ms$로 치환하면 $m^n\int_0^1 s(1-s)^{n-2}ds$이다. Var $M$은 예제 3.5의 $F_M(x)=x^n$에서 나온다.

답 (b) $\frac{n-1}{n+1}$ (c) Cov $=\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$, Corr $=\frac{1}{n}$ (d) $\frac{1}{3}$

**D4** 힌트 (a) 정리 6.2로 $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}$, $\Sigma=\sigma^2[(1-\rho)I+\rho\mathbf{1}\mathbf{1}']$. (b) Cauchy–Schwarz로 $1=(\sum a_i\cdot 1)^2\le n\sum a_i^2$.

답 (c) 0.28