수리통계학 × 통계학의 역사

2회 워크북 — 풀이판

기댓값과 대수의 법칙 손으로 푸는 34문항

학생판과 같은 문제에 빈칸의 답과 완전한 풀이를 붙였다. 학생판으로 먼저 풀고, 힌트와 최종답으로도 막힐 때 이 판을 본다.

부	하는 일	문항	예상 시간
A 계산 드릴	정의와 공식을 손으로 돌린다. 답이 수나 식으로 나온다	14	2시간
B 빈칸 증명	노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다	7	2시간 50분
C 증명 문제	변형, 일반화, 반례 만들기	9	2시간 40분
D 퀄형	여러 절을 잇는 종합 문제. 제한 시간 안에	4	2시간 25분
	합계	34	약 10시간

노트 `02_expectation_notes.pdf` — 문항의 "정리 5.9" 같은 번호는 노트의 번호다. "1회 정리 4.7"은 1회 노트의 번호다

도구 `00_toolkit_notes.pdf` — [T2] 귀류, [T3] 귀납, [T4] 부등식, [T5] 극한과 급수, [T6] 순서 바꾸기, [T7] 변수변환

검산 노트북 `02_expectation.ipynb`의 "워크북 검산" 절: `check("A3", "161/36")`

이 워크북을 쓰는 법

1. **노트를 덮고 푼다.** 문제의 머리 오른쪽에 쓸 도구, 관련 정리 번호, 예상 시간이 있다. 예상 시간의 두 배가 지나도 진척이 없으면 그때 노트를 편다.
2. **막히면 3단으로 본다.** 뒤의 **힌트와 최종답**에서 힌트를 먼저 본다. 다 푼 뒤에는 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나거나 증명이 막히면 풀이판을 본다.
3. **B부는 순서대로 푼다.** 같은 정리를 여러 번 만난다. 처음에는 근거만 빈칸이고(①), 다음에는 단계의 이름만 있고(②), 마지막에는 전략만 있다(③). 앞 단계의 답을 보면서 다음 단계를 쓰지 않는다.
4. **계산은 검산한다.** 최종답이 수나 식인 문항은 노트북의 `check()`에 넣으면 맞는지만 알려 준다. 정답은 보여 주지 않는다.
5. **증명은 근거를 단다.** 등호와 부등호마다 어느 정의, 정리, 도구를 썼는지 오른쪽에 적는다. 합과 기댓값, 극한과 적분의 순서를 바꾸는 곳에서는 그래도 되는 조건을 따로 확인한다.

표시 ★ 정의를 바로 쓰는 문제, ★★ 두세 단계를 잇는 문제, ★★★ 퀄에 나오는 길이의 문제. [T1]–[T8]은 증명 도구 상자의 도구 번호다.

A

계산 드릴

정의와 공식을 손으로 돌린다. 답이 수나 식으로 떨어지므로 다 풀면 뒤의 최종답이나 노트북의 `check()`로 맞춰 본다. 계산기는 마지막 수치에만 쓴다.

A1 이산 확률변수의 평균과 분산 ★

정의 1.1, 정리 2.2 · 8분

$P(X=-1)=0.2$, $P(X=0)=0.3$, $P(X=2)=0.5$이다. (a) EX, (b) $\operatorname{Var}X$를 정의 $E(X-\mu)^2$으로 직접 구하고 $EX^2-\mu^2$으로도 구하라. (c) $E(3X-1)$, (d) $\operatorname{Var}(3X-1)$을 구하라.

풀이 (a) $EX=-0.2+0+1=0.8$. (b) 정의로 $(-1.8)^2\cdot 0.2+(-0.8)^2\cdot 0.3+1.2^2\cdot 0.5=0.648+0.192+0.72=1.56$이다. $EX^2=0.2+0+2=2.2$이므로 $EX^2-\mu^2=2.2-0.64=1.56$으로 같다. (c) 선형성으로 $3\cdot 0.8-1=1.4$. (d) 정리 2.2(b)로 $9\cdot 1.56=14.04$. 상수 -1은 분산을 바꾸지 않는다.

최종답 (a) 0.8 (b) 1.56 (c) 1.4 (d) 14.04

A2 밀도에서 적률 ★

정의 1.5, 정리 1.9 · 8분

X의 밀도가 $f(x)=3x^2$ $(0<x<1)$이다. (a) EX, (b) $\operatorname{Var}X$, (c) $E\frac{1}{X}$를 구하라. (c)를 $\frac{1}{EX}$와 비교하라.

풀이 (a) $EX=\int_0^1 3x^3dx=\frac{3}{4}$. (b) $EX^2=\int_0^1 3x^4dx=\frac{3}{5}$이므로 $\operatorname{Var}X=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}$. (c) $E\frac{1}{X}=\int_0^1 3x\,dx=\frac{3}{2}$. $\frac{1}{EX}=\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$이므로 따름정리 5.10(b)의 $E\frac{1}{X}\ge\frac{1}{EX}$와 맞는다.

최종답 (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{3}{80}$ (c) $\frac{3}{2}$

A3 두 주사위의 최댓값 ★

정리 1.13(a) · 8분

공정한 주사위 두 개를 독립으로 던진 눈의 최댓값을 M이라 하자. 꼬리 공식으로 EM을 구하라.

풀이 $P(M\le j)=(j/6)^2$이므로 $P(M\ge k)=1-\left(\frac{k-1}{6}\right)^2$ $(k=1,\dots,6)$이다. 꼬리 공식으로

$$EM=\sum_{k=1}^{6}\left[1-\left(\frac{k-1}{6}\right)^2\right]=6-\frac{0+1+4+9+16+25}{36}=6-\frac{55}{36}=\frac{161}{36}\approx 4.47.$$

한 개를 던질 때의 평균 3.5보다 크다.

최종답 $\frac{161}{36} \approx 4.47$

A4 이웃한 두 에이스 ★

정리 1.11 · 8분

52장을 잘 섞어 한 줄로 늘어놓는다. 이웃한 두 자리 $(i, i+1)$ $(i = 1, \dots, 51)$ 가운데 두 장이 모두 에이스인 자리의 수의 기댓값을 구하라.

풀이 I_i를 자리 i와 $i+1$이 모두 에이스인 사건의 지시변수라 하면 구하는 수는 $\sum_{i=1}^{51} I_i$이다. 두 특정한 자리에 놓이는 카드의 순서쌍은 $52 \cdot 51$가지가 같은 확률이고, 그 가운데 둘 다 에이스인 것은 $4 \cdot 3$가지이므로 $EI_i = \frac{12}{52 \cdot 51}$이다. 선형성(정리 1.11)으로 $51 \cdot \frac{12}{52 \cdot 51} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \approx 0.23$이다.

최종답 $\frac{3}{13}$

A5 나오지 않은 눈의 수 ★★

정리 1.11, 예제 2.9 · 12분

공정한 주사위를 10번 던져 한 번도 나오지 않은 눈의 수를 N이라 하자. (a) EN, (b) $\operatorname{Var} N$을 구하라.

풀이 (a) $P(B_j) = (5/6)^{10}$이므로 $EN = 6(5/6)^{10} \approx 0.969$이다. (b) $j \neq k$이면 $B_j B_k$는 열 번 모두 나머지 네 눈만 나오는 사건이므로 $P(B_j B_k) = (4/6)^{10}$이고, 순서쌍 (j,k)는 30개이다. $E\,N(N-1) = 30(2/3)^{10}$이므로

$$\operatorname{Var} N = E\,N(N-1) + EN - (EN)^2 = 30\Big(\frac{2}{3}\Big)^{10} + 6\Big(\frac{5}{6}\Big)^{10} - 36\Big(\frac{5}{6}\Big)^{20} \approx 0.550.$$

B_j들은 독립이 아니므로 정리 2.8을 쓸 수 없다. 교차항 $P(B_jB_k) - P(B_j)P(B_k) = (2/3)^{10} - (5/6)^{20} < 0$이 분산을 독립인 경우보다 줄인다.

최종답 (a) $6(5/6)^{10} \approx 0.969$ (b) ≈ 0.550

A6 이항분포의 적률 ★

정리 2.4 · 6분

$K \sim \mathrm{b}(20, 0.3)$이다. (a) EK, (b) $\operatorname{Var} K$, (c) $E\,K(K-1)$, (d) EK^2을 구하라.

풀이 (a) $np = 6$. (b) $npq = 4.2$. (c) $n(n-1)p^2 = 20 \cdot 19 \cdot 0.09 = 34.2$. (d) $EK^2 = E\,K(K-1) + EK = 40.2$이고, $\operatorname{Var} K + (EK)^2 = 4.2 + 36$과 같다.

최종답 (a) 6 (b) 4.2 (c) 34.2 (d) 40.2

A7 mgf로 분포 알아보기 ★

정리 3.3, 3.6 · 8분

X의 mgf가 $M(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^t\right)^5$이다. (a) X의 분포와 그 근거를 말하라. (b) EX, (c) $\operatorname{Var} X$, (d) $P(X = 5)$를 구하라.

풀이 (a) 예제 3.2로 $\mathrm{b}(5, \frac{2}{3})$의 mgf와 같고, 모든 t에서 존재하므로 3.3절 상자의 유일성으로 $X \sim \mathrm{b}(5, \frac{2}{3})$이다. (b) $np = \frac{10}{3}$. (c) $npq = \frac{10}{9}$. (d) $M(t) = \sum_k P(X=k)e^{tk}$에서 e^{5t}의 계수는 $(\frac{2}{3})^5 = \frac{32}{243} \approx 0.132$이다.

최종답 (b) $\frac{10}{3}$ (c) $\frac{10}{9}$ (d) $\frac{32}{243}$

A8 mgf의 미분 ★

정리 3.3, 따름정리 3.4 · 8분

X의 mgf가 $M(t) = (1-2t)^{-3}$ $(t < \frac{1}{2})$이다. (a) EX, (b) $\operatorname{Var} X$, (c) EX^3을 구하라. (b)는 로그 mgf로 구하라.

풀이 (a) $M'(t) = 6(1-2t)^{-4}$이므로 $EX = M'(0) = 6$. (b) $\psi'(t) = \frac{6}{1-2t}$, $\psi''(t) = \frac{12}{(1-2t)^2}$이므로 $\operatorname{Var} X = \psi''(0) = 12$. (c) $M''(t) = 48(1-2t)^{-5}$, $M'''(t) = 480(1-2t)^{-6}$이므로 $EX^3 = 480$이다. 확인: $EX^2 = M''(0) = 48 = 12 + 36$.

최종답 (a) 6 (b) 12 (c) 480

A9 지수분포의 변환 ★★

정리 4.3, 정리 1.9 · 10분

$X \sim \mathrm{Exp}(2)$, $Y = e^{-X}$이다. (a) 정리 4.3으로 Y의 밀도를 구하라. (b) EY를 (a)의 밀도로 구하고, 정리 1.9(b)로도 구하라.

풀이 (a) $h(y) = -\log y$, $|h'(y)| = \frac{1}{y}$이므로 $f_Y(y) = 2e^{-2(-\log y)} \cdot \frac{1}{y} = 2y^2 \cdot \frac{1}{y} = 2y$ $(0 < y < 1)$. 분포함수 방법으로 확인하면 $F_Y(y) = P(X \ge -\log y) = e^{2\log y} = y^2$이다. (b) $EY = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$. 정리 1.9(b)로는 $E\,e^{-X} = \int_0^\infty e^{-x} \cdot 2e^{-2x} dx = \frac{2}{3}$이다.

최종답 (a) $f_Y(y) = 2y$ $(0 < y < 1)$ (b) $\frac{2}{3}$

A10 분위수 함수 ★★

보조정리 4.6, 정리 4.7, 1.13(b) · 10분

$F(x) = 1 - (1+x)^{-2}$ $(x \ge 0)$, $x < 0$에서 0인 분포함수가 있다. (a) $0 < u < 1$에서 $F^-(u)$를 구하라. (b) 중앙값을 구하라. (c) 꼬리 공식으로 EX를 구하라.

풀이 (a) $1 - (1+x)^{-2} = u$를 풀면 $x = (1-u)^{-1/2} - 1$이다. (b) $u = \frac{1}{2}$이면 $\sqrt{2} - 1 \approx 0.414$. (c) $P(X > x) = (1+x)^{-2}$이므로 $EX = \int_0^\infty (1+x)^{-2} dx = 1$이다. 역변환 표집(정리 4.7(a))

으로는 $X = (1-U)^{-1/2} - 1$이다.

최종답 (a) $(1-u)^{-1/2}-1$ (b) $\sqrt{2}-1$ (c) 1

A11 두 한계 ★

정리 5.1, 5.3 · 6분

$X \ge 0$, $EX = 2$, $\operatorname{Var} X = 1$이다. $P(X \ge 10)$의 상한을 (a) Markov 부등식으로, (b) Chebyshev 부등식으로 구하라.

풀이 (a) $P(X \ge 10) \le \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. (b) $\{X \ge 10\} \subset \{|X-2| \ge 8\}$이므로 $P(X \ge 10) \le \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$. 분산의 정보가 한계를 13배 가까이 줄였다.

최종답 (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{64}$

A12 로그의 평균 ★

정리 5.9 · 8분

$X \sim \mathrm{U}(1,3)$이다. $E\log X$를 구하고 $\log EX$와 비교하라.

풀이 $E\log X = \frac{1}{2}\int_1^3 \log x\,dx = \frac{1}{2}\big[x\log x - x\big]_1^3 = \frac{1}{2}(3\log 3 - 2) \approx 0.648$이다. $\log EX = \log 2 \approx 0.693$이므로 $E\log X < \log EX$이고, log가 오목이라는 Jensen 부등식과 맞는다.

최종답 $\frac{1}{2}(3\log 3 - 2) \approx 0.648$

A13 불량률 조사의 표본 크기 ★★

정리 6.2, 8.2 · 10분

불량률 p를 $\hat{p}_n$으로 추정해 $P(|\hat{p}_n - p| \ge 0.01) \le 0.05$를 보장하고 싶다. 필요한 n을 (a) $pq \le \frac{1}{4}$을 쓴 Chebyshev 한계(정리 6.2)로, (b) $p \le 0.1$임을 미리 알 때의 Chebyshev 한계로, (c) Hoeffding 부등식(정리 8.2)으로 구하라.

풀이 (a) $\frac{1}{4n(0.01)^2} \le 0.05$에서 $n \ge \frac{1}{4\cdot 0.0001 \cdot 0.05} = 50{,}000$. (b) $p(1-p)$는 $p \le \frac{1}{2}$에서 증가하므로 $pq \le 0.09$이고 $\frac{0.09}{n\cdot 0.0001} \le 0.05$에서 $n \ge 18{,}000$. (c) $n \ge \frac{\log 40}{2\cdot 0.0001} = 18{,}444.4$이므로 $n \ge 18{,}445$. Hoeffding은 분산의 정보를 쓰지 않으므로, p가 작다는 것을 아는 경우에는 Chebyshev가 Hoeffding보다 작은 n을 줄 수 있다.

최종답 (a) 50,000 (b) 18,000 (c) 18,445

A14 연속형 꼬리 공식 ★

정리 1.13(b) · 8분

$X \geq 0$이고 $P(X > x) = (1+x)^{-3}$ $(x \geq 0)$이다. (a) EX, (b) 중앙값을 구하라.

풀이 (a) $EX = \int_0^\infty (1+x)^{-3}dx = \left[-\frac{1}{2}(1+x)^{-2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$. (b) $(1+m)^{-3} = \frac{1}{2}$에서 $m = 2^{1/3}-1 \approx 0.260$이다. 오른쪽 꼬리가 길어서 평균이 중앙값보다 크다.

최종답 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $2^{1/3}-1 \approx 0.260$

B

빈칸 증명

노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다. 같은 정리를 여러 번 만나며 도움이 줄어든다. ① 단계는 주어지고 근거만 빈칸이다. ② 단계의 이름만 주어진다. ③ 전략만 주어진다. 근거에는 정의나 정리의 번호, 도구 번호를 쓴다.

B1 꼬리 공식, 근거 채우기 ★ ① · 정리 1.13(b) · 15분

$X \geq 0$이 밀도 f를 가지면 $EX = \int_0^\infty P(X > x)\,dx$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $P(X > x) = \int_x^\infty f(t)\,dt$이다. 1회 정리 6.7(c)

② 영역 $\{0 \leq x < t\}$ 위에서 $f(t)$를 두 순서로 적분한다.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P(X > x)\,dx &= \int_0^\infty \int_x^\infty f(t)\,dt\,dx \\ &= \int_0^\infty \Big(\int_0^t dx\Big) f(t)\,dt && \text{Tonelli, } f \geq 0 \text{ [T6]} \\ &= \int_0^\infty t\,f(t)\,dt = EX && \text{정의 1.5, } X \geq 0\end{aligned}$$

③ $P(X > x) = 1 - F(x)$이다. 여사건, 1회 정리 4.3(c)

마지막으로, 순서를 바꿀 때 쓴 조건은 무엇이고 부호가 섞인 X에 이 계산을 그대로 쓸 수 없는 이유는 무엇인지 두 줄로 써라.

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 순서를 바꿀 때 쓴 조건은 피적분함수가 음이 아니라는 것뿐이다(그래서 양변이 ∞여도 등식이 성립한다). 부호가 섞이면 $\int\int$의 두 순서가 다른 값을 줄 수 있고(도구 상자 T6의 반례), EX가 존재하지 않을 수도 있다. 그때는 $X = X^+ - X^-$로 나눠 각각에 쓴다.

B2 Jensen 부등식, 근거 채우기 ★★

① · 정리 5.9 · 15분

φ가 열린 구간 I에서 볼록이고 $P(X \in I) = 1$, $E|X| < \infty$, $E|\varphi(X)| < \infty$이면 $\varphi(EX) \le E\varphi(X)$이다. 근거를 채워라.

① $\mu = EX$는 I 안에 있다. 끝점이면 $X - \alpha > 0$인데 $E(X-\alpha) = 0$이 되어 모순이다. — Markov와 1회 정리 4.7

② I에서 $\varphi(x) \ge \ell(x) = \varphi(\mu) + b(x-\mu)$인 b가 있다. — 보조정리 5.8

③ $E\,\varphi(X) \ge E\,\ell(X)$이다. — 단조성, 정리 1.10(b)

④ $E\,\ell(X) = \varphi(\mu) + b(EX - \mu) = \varphi(\mu)$이다. — 선형성, 정리 1.10(a)

⑤ ③에서 $E\,\ell(X)$가 존재한다. — $E|X| < \infty$

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. ①의 자세한 논리: $\mu = \alpha$이면 $Y = X - \alpha$는 확률 1로 양수이고 $EY = 0$이다. Markov 부등식으로 $P(Y \ge \frac{1}{n}) \le n\,EY = 0$이고, $\{Y \ge \frac{1}{n}\} \uparrow \{Y > 0\}$이므로 연속성으로 $P(Y > 0) = 0$이 되어 $P(Y > 0) = 1$과 모순이다.

B3 확률적분변환, 근거 채우기 ★★

① · 정리 4.7(b) · 20분

F가 연속인 분포함수이면 $F(X) \sim \mathrm{U}(0,1)$이다. $0 < u < 1$을 고정한다. 근거를 채워라.

① $\{F(X) < u\} = \{X < F^{-}(u)\}$이다. — 보조정리 4.6의 대우 [T2]

② $P(X < F^{-}(u)) = F(F^{-}(u))$이다. — 1회 정리 6.3(d), F 연속

③ $F(F^{-}(u)) \ge u$이다. — 하한의 정의, F의 오른쪽 연속

④ $F(F^{-}(u)) \le u$이다. — $x < F^{-}(u)$이면 $F(x) < u$, F 연속

⑤ $P(F(X) \le u) = \lim_n P\big(F(X) < u + \frac{1}{n}\big) = u$이다. — 1회 정리 4.7(b)

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. F가 뛰는 점이 있으면 ②와 ④가 모두 깨진다. 노트 연습 4.7의 Bernoulli 예에서 $F(X)$는 $\frac{1}{2}$과 1의 두 값만 갖는다.

B4 꼬리 공식, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 1.13 · 25분

정리 1.13의 (a)와 (b)를 증명하라. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① **(a) $P(X \ge k)$를 확률질량함수의 합으로 쓴다**

② **이중합으로 쓰고 항 $p(j)$가 몇 번 나오는지 센다**

③ **순서를 바꿔 EX를 얻는다**

④ **(b) $P(X > x)$를 밀도의 적분으로 쓴다**

⑤ **적분 영역을 그리고 순서를 바꾼다**

⑥ **조건 확인: 순서를 바꿀 수 있는 근거**

풀이

① $P(X \ge k) = \sum_{j \ge k} p(j)$. (P3)

② $\sum_{k \ge 1} P(X \ge k) = \sum_{k \ge 1} \sum_{j \ge k} p(j)$이고 $p(j)$는 $k = 1, \dots, j$에서 j번 나온다. 셈

③ $= \sum_j j\, p(j) = EX$. 음이 아닌 이중합, 1회 4.6절 상자

④ $P(X > x) = \int_x^\infty f(t)\,dt$. 1회 정리 6.7(c)

⑤ $\int_0^\infty \int_x^\infty f(t)\,dt\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^t dx\right) f(t)\,dt = \int_0^\infty t f(t)\,dt$. Tonelli [T6]

⑥ 항과 피적분함수가 음이 아니다. 양변이 ∞여도 성립한다. [T6]

B5 Jensen 부등식, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 5.9 · 25분

정리 5.9를 증명하라. 보조정리 5.8(받침선)은 써도 된다.

① $\mu = EX$가 I 안에 있음을 보인다

② 받침선을 잡는다

③ 단조성으로 기댓값을 비교한다

④ 받침선의 기댓값을 계산한다

⑤ 조건 확인: 두 기댓값이 존재하는가

⑥ 오목인 경우

풀이 노트 정리 5.9의 단계형 증명과 같다. 단계별 근거는 B2를 본다. 마지막 단계: φ가 오목이면 $-\varphi$가 볼록이므로 $-\varphi(EX) \le E(-\varphi(X))$, 곧 $\varphi(EX) \ge E\varphi(X)$이다.

B6 받침선과 Jensen, 전략만 ★★★

③ · 보조정리 5.8, 정리 5.9 · 35분

보조정리 5.8과 정리 5.9를 모두 증명하라.

전략 볼록이면 μ 왼쪽의 기울기들이 오른쪽의 기울기들보다 작다. 그 사이의 기울기 b로 받침선을 만들고, 받침선의 기댓값을 계산한다.

풀이 보조정리: $x < \mu < y$이면 $\mu = \lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda = \frac{y-\mu}{y-x}$이고 볼록성으로 $\varphi(\mu) \le \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$이다. 양변에 $y-x$를 곱해 정리하면 $(y-x)\varphi(\mu) \le (y-\mu)\varphi(x) + (\mu-x)\varphi(y)$, 곧 $\frac{\varphi(\mu)-\varphi(x)}{\mu-x} \le \frac{\varphi(y)-\varphi(\mu)}{y-\mu}$이다. 왼쪽 기울기들은 오른쪽 기울기 하나로 위로 유계이므로 상한 b가 있고, 모든 $x < \mu < y$에서 왼쪽 기울기 $\le b \le$ 오른쪽 기울기이다. 각각에 $\mu - x > 0$, $y - \mu > 0$을 곱하면 $\varphi(x) \ge \varphi(\mu) + b(x-\mu)$, $\varphi(y) \ge \varphi(\mu) + b(y-\mu)$이다. I가 열린 구간이어서 μ의 양쪽에 점이 있다는 것이 쓰였다. 정리는 B2와 B5의 풀이와 같다.

B7 역변환 표집과 확률적분변환, 전략만 ★★★ ③ · 보조정리 4.6, 정리 4.7 · 35분

보조정리 4.6과 정리 4.7의 (a)(b)를 모두 증명하라.

전략 하한의 정의와 F의 오른쪽 연속성으로 $F(F^{-}(u)) \geq u$를 얻는 것이 보조정리의 전부다. 정리는 이 보조정리로 사건을 바꿔 쓴다.

풀이 보조정리: ($\Leftarrow$) $u \leq F(x)$이면 x는 집합 $\{x' : F(x') \geq u\}$에 속하므로 하한 $F^{-}(u) \leq x$이다. ($\Rightarrow$) 그 집합은 $F \to 1 > u$이므로 비어 있지 않고, $F \to 0 < u$이므로 아래로 유계다. 하한으로 가는 수열 $x_n \downarrow F^{-}(u)$, $F(x_n) \geq u$를 잡으면 오른쪽 연속성으로 $F(F^{-}(u)) \geq u$이다. $F^{-}(u) \leq x$이면 F가 비감소이므로 $F(x) \geq u$이다. 정리 (a)는 $P(F^{-}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$이고, (b)는 B3의 단계와 같다.

C

증명 문제

노트의 정리를 변형하고, 일반화하고, 반례로 경계를 확인한다. 증명은 노트의 단계형 모양으로 쓴다. 한 줄에 한 단계, 줄마다 근거. 기댓값과 합·극한의 순서를 바꾸는 곳에서는 조건을 따로 확인한다.

C1 유계인 확률변수의 분산 ★★

[T4] · 정리 2.2(c), 따름정리 5.6 · 15분

$P(a \le X \le b) = 1$이면 $\operatorname{Var} X \le \frac{(b-a)^2}{4}$임을 보여라. 등호는 언제 성립하는가?

풀이 $c = \frac{a+b}{2}$로 두면 $|X - c| \le \frac{b-a}{2}$이므로 정리 2.2(c)와 단조성으로

$$\operatorname{Var} X \le \operatorname{Var} X + (\mu - c)^2 = E(X-c)^2 \le \frac{(b-a)^2}{4}.$$

등호이면 두 부등호가 모두 등호다. 첫째로 $\mu = c$이다. 둘째로 $Y = \frac{(b-a)^2}{4} - (X-c)^2 \ge 0$이고 $EY = 0$이므로 노트 연습 5.8(c)로 $P(Y=0)=1$, 곧 $X \in \{a, b\}$이다. 그러면 $EX = c$에서 $P(X=a) = P(X=b) = \frac{1}{2}$이다. 거꾸로 이 분포는 분산이 $\frac{(b-a)^2}{4}$이다. $[0,1]$의 Bernoulli에서 $pq \le \frac{1}{4}$가 이 결과의 특수한 경우다.

C2 곱의 기댓값이 갈라져도 독립은 아니다 ★

[T2] · 정리 2.7, 2.8 · 10분

X가 $-1, 0, 1$을 같은 확률로 갖고 $Y = X^2$이다.

(a) $E(XY) = EX \cdot EY$임을 보여라.

(b) X와 Y가 독립이 아님을 보여라.

(c) $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$인가? 정리 2.8의 증명에서 실제로 쓰인 가정이 무엇인지와 연결해 설명하라.

풀이 (a) $XY = X^3 = X$이므로 $E(XY) = EX = 0 = EX \cdot EY$이다. (b) $P(X=0, Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{3}$이지만 $P(X=0)P(Y=0) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$이다. X를 알면 Y가 정해지므로 정보가 없다는 뜻의 독립과 거리가 멀다. (c) $EY = \frac{2}{3}$, $\operatorname{Var} X = \frac{2}{3}$, $\operatorname{Var} Y = EY^2 - (EY)^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$이다. $X+Y$는 $0, 0, 2$를 같은 확률로 가지므로 평균 $\frac{2}{3}$, $\operatorname{Var}(X+Y) = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{8}{9} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}$로 성립한다. 정리 2.8의 증명이 쓴 것은 교차항 $E(D_X D_Y) = E(XY) - EX\,EY = 0$뿐이고, 독립은 그것을 보장하는 한 가지 방법이었다. 정리 2.7의 거꾸로는 성립하지 않는다.

C3 평균이 있으면 꼬리는 $1/x$보다 빨리 준다 ★★

[T5], [T6] · 정리 1.13 · 20분

(a) $X \geq 0$이 밀도 f를 갖고 $EX < \infty$이면 $x\,P(X > x) \to 0$ $(x \to \infty)$임을 보여라.

(b) 거꾸로는 성립하지 않는다. $x \geq e$에서 $P(X > x) = \dfrac{e}{x \log x}$, $x < e$에서 $P(X > x) = 1$인 X가 있다. 이것이 분포함수를 주는지 확인하고, $x\,P(X > x) \to 0$이지만 $EX = \infty$임을 보여라.

풀이 (a) $t \geq x$에서 $x \leq t$이므로 $x\,P(X > x) = \int_x^\infty x\,f(t)\,dt \leq \int_x^\infty t\,f(t)\,dt$이다. $\int_0^\infty t f(t)\,dt = EX < \infty$이므로 오른쪽은 $\int_0^\infty tf - \int_0^x tf \to 0$이다 [T5]. 왼쪽은 음이 아니므로 0으로 간다.

(b) $G(x) = P(X > x)$는 $x < e$에서 1, $x = e$에서 $\dfrac{e}{e \cdot 1} = 1$로 이어지고, $x \log x$가 증가하므로 $x \geq e$에서 감소하며 0으로 간다. 따라서 $F = 1 - G$는 연속인 분포함수다. $x\,G(x) = \dfrac{e}{\log x} \to 0$이지만 꼬리 공식으로

$$EX = \int_0^\infty G(x)\,dx \geq \int_e^A \frac{e}{x \log x}\,dx = e\,\log\log A \to \infty.$$

(a)의 조건 $x\,P(X > x) \to 0$은 평균이 있기 위한 필요조건이지 충분조건이 아니다.

C4 Jensen의 등호 ★★★

[T2], [T4] · 보조정리 5.8, 정리 5.9 · 25분

φ가 열린 구간 I에서 **순볼록**이다. 곧 $x \neq y$, $0 < \lambda < 1$이면 $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$이다. 정리 5.9의 가정 아래 $\varphi(EX) = E\varphi(X)$이면 $P(X = EX) = 1$임을 보여라.

풀이 $\mu = EX$와 보조정리 5.8의 받침선 $\ell(x) = \varphi(\mu) + b(x - \mu)$를 잡는다.

① $x \neq \mu$이면 $\varphi(x) > \ell(x)$이다. 어떤 $x_0 \neq \mu$에서 $\varphi(x_0) = \ell(x_0)$이라 하면 중점 $z = \dfrac{x_0 + \mu}{2}$에서 $\varphi(z) < \dfrac{1}{2}\varphi(x_0) + \dfrac{1}{2}\varphi(\mu) = \dfrac{1}{2}\ell(x_0) + \dfrac{1}{2}\ell(\mu) = \ell(z)$인데, 이는 $\varphi \geq \ell$과 모순이다. 순볼록, ℓ은 일차식 [T2]

② $Y = \varphi(X) - \ell(X) \geq 0$이고 $EY = E\varphi(X) - \varphi(\mu) = 0$이다. 정리 5.9의 증명 ④

③ $P(Y = 0) = 1$이다. 노트 연습 5.8(c)

④ $Y = 0$이면 ①로 $X = \mu$이므로 $P(X = \mu) = 1$이다.

분산의 경우($\varphi(x) = x^2$)에는 이것이 따름정리 5.6이다.

C5 분위수 함수의 성질 ★★

[T5] · 보조정리 4.6 · 15분

분포함수 F의 분위수 함수 $F^{-}(u)=\inf\{x : F(x)\ge u\}$ $(0<u<1)$에 대해 (a) F^{-}가 비감소임을, (b) F^{-}가 왼쪽 연속임을 보여라. (c) $X\sim\text{Bernoulli}(\tfrac12)$이면 F^{-}는 어떤 함수인가? (b)와 맞는지 확인하라.

풀이 (a) $u<v$이면 $\{x:F(x)\ge v\}\subset\{x:F(x)\ge u\}$이므로 하한은 $F^{-}(u)\le F^{-}(v)$이다. (b) $u_n\uparrow u$이면 (a)로 $F^{-}(u_n)$은 증가하고 $F^{-}(u)$ 이하이므로 극한 $L\le F^{-}(u)$가 있다 [T5]. 모든 n에서 $F^{-}(u_n)\le L$이므로 보조정리 4.6으로 $u_n\le F(L)$이고, $n\to\infty$이면 $u\le F(L)$이다. 다시 보조정리 4.6으로 $F^{-}(u)\le L$이다. 따라서 $L=F^{-}(u)$이다. (c) $F(x)=0$ $(x<0)$, $\tfrac12$ $(0\le x<1)$, 1 $(x\ge1)$이므로 $F^{-}(u)=0$ $(0<u\le\tfrac12)$, 1 $(\tfrac12<u<1)$이다. $u=\tfrac12$에서 왼쪽 극한 0과 값 0이 같고, 오른쪽에서는 1로 뛴다. 왼쪽 연속이다.

C6 연속함수는 확률수렴을 보존한다 ★★

[T5] · 정의 6.1, 정리 6.2 · 15분

$Y_n\xrightarrow{P}c$이고 g가 c에서 연속이면 $g(Y_n)\xrightarrow{P}g(c)$임을 보여라. 이것으로 $\hat p_n(1-\hat p_n)\xrightarrow{P}p(1-p)$와 $\sqrt{\hat p_n}\xrightarrow{P}\sqrt{p}$를 결론지어라.

풀이 $\varepsilon>0$을 고정한다. g가 c에서 연속이므로 $|y-c|<\delta$이면 $|g(y)-g(c)|<\varepsilon$인 $\delta>0$이 있다 [T5]. 대우로 $|g(y)-g(c)|\ge\varepsilon$이면 $|y-c|\ge\delta$이므로 $\{|g(Y_n)-g(c)|\ge\varepsilon\}\subset\{|Y_n-c|\ge\delta\}$이고, 단조성으로 $P(|g(Y_n)-g(c)|\ge\varepsilon)\le P(|Y_n-c|\ge\delta)\to0$이다. 정리 6.2로 $\hat p_n\xrightarrow{P}p$이고, $g(y)=y(1-y)$와 $g(y)=\sqrt{y}$ $(y\ge0)$는 연속이다. 앞의 것은 Chebyshev 한계의 분산 pq를 자료로 추정하는 근거다.

C7 닮은 관측의 대수의 법칙 ★★

[T5] · 정리 2.8의 증명, 정리 6.3 · 20분

이산 확률공간 위의 $X_1,X_2,\dots$가 모두 평균 μ, 분산 σ^2을 갖고, $D_i=X_i-\mu$에 대해 $E(D_iD_j)=\sigma^2\rho^{|i-j|}$ $(|\rho|<1)$이다.

(a) $\operatorname{Var}\bar X_n=\frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\rho^{|i-j|}\le\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$임을 보여라.

(b) $\bar X_n\xrightarrow{P}\mu$임을 보여라.

(c) $\rho=\tfrac12$이면 $\lim_n n\operatorname{Var}\bar X_n/\sigma^2$은 얼마인가? 서로 닮은 관측 n개는 독립인 관측 몇 개만큼의 정보를 갖는가?

풀이 (a) 선형성으로 $\operatorname{Var}\bar X_n=\frac{1}{n^2}E(\sum_i D_i)^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j}E(D_iD_j)=\frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i,j}\rho^{|i-j|}$이다. i를 고정하면 $|i-j|=k\ge1$인 j는 많아야 두 개이므로 $\sum_j|\rho|^{|i-j|}\le1+2\sum_{k\ge1}|\rho|^k=\frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$이고, i에 대해 더하면 결론이다 [T5]. (b) Chebyshev로 $P(|\bar X_n-\mu|\ge\varepsilon)\le\frac{\sigma^2(1+|\rho|)}{n\varepsilon^2(1-|\rho|)}\to0$이다. (c) $\frac1n\sum_{i,j}\rho^{|i-j|}=1+2\sum_{k=1}^{n-1}(1-\frac{k}{n})\rho^k\to1+\frac{2\rho}{1-\rho}=\frac{1+\rho}{1-\rho}=3$이다. $\operatorname{Var}\bar X_n\approx\frac{3\sigma^2}{n}$은 독립인 관측 $n/3$개의 분산과 같다. 대수의 법칙은 성립하지만 같은 정확도를 얻으려면 관측이 세

배 필요하다. 노트 7.4절의 "독립이 아니면"에서 $\rho = 1$인 극단을 보았다.

최종답 (c) 3

C8 성공 수가 짝수일 확률 ★★

예제 3.8 · 15분

$K \sim \mathrm{b}(n, p)$이고 $G(z) = E\,z^K$가 확률생성함수다. (a) $G(z) = (q + pz)^n$임을 보여라. (b) $P(K\text{가 짝수}) = \frac{1}{2}\big(1 + (q-p)^n\big)$임을 보여라. (c) $n = 10$, $p = 0.3$이면 이 확률은 얼마인가?

풀이 (a) 이항정리로 $G(z) = \sum_k \binom{n}{k}(pz)^k q^{n-k} = (q+pz)^n$이다. (b) $1 + (-1)^k$은 k가 짝수이면 2, 홀수이면 0이므로 $G(1) + G(-1) = 2P(K\text{ 짝수})$이다. $G(1) = 1$, $G(-1) = (q-p)^n$이므로 결론이다. (c) $\frac{1}{2}(1 + 0.4^{10}) = \frac{9766649}{19531250} \approx 0.50005$이다. $|q-p| < 1$이면 n이 커질수록 짝수와 홀수가 같은 확률에 가까워진다. $p = \frac{1}{2}$이면 $n \ge 1$에서 정확히 $\frac{1}{2}$이다.

최종답 (b) $\frac{1}{2}\big(1 + (q-p)^n\big)$ (c) ≈ 0.50005

C9 $[0,1]$ 값의 mgf와 Chernoff 한계 ★★★

[T4] · 정리 8.1, 3.6 · 25분

X가 확률 1로 $[0,1]$에 있고 $EX = \mu$이다.

(a) $0 \le x \le 1$이면 $e^{tx} \le (1-x) + x\,e^t$ 임을 볼록성으로 보여라.

(b) $M_X(t) \le 1 - \mu + \mu e^t$ 임을 보여라. 오른쪽은 어떤 분포의 mgf인가?

(c) $X_1, \dots, X_n$이 독립인 이산 확률변수이고 모두 (b)의 조건을 만족하면, $\mu < a < 1$에서 $P(\bar X_n \ge a) \le e^{-nD(a\|\mu)}$ 임을 정리 8.1의 증명을 따라 보여라.

풀이 (a) $s \mapsto e^{ts}$는 볼록이고 $x = (1-x)\cdot 0 + x \cdot 1$이므로 $e^{tx} \le (1-x)e^0 + x\,e^t$이다. (b) (a)를 X에 쓰고 단조성과 선형성으로 $M_X(t) \le 1 - \mu + \mu e^t$이다. 오른쪽은 Bernoulli($\mu$)의 mgf다. 같은 평균을 갖는 $[0,1]$의 분포 가운데 mgf가 가장 큰 것은 양 끝에 몰린 Bernoulli다. (c) $t > 0$에서 따름정리 5.2와 정리 3.6(b)로

$$P\Big(\sum_i X_i \ge na\Big) \le e^{-tna} \prod_i M_{X_i}(t) \le e^{-tna}(1 - \mu + \mu e^t)^n$$

이다. 오른쪽은 정리 8.1의 증명에서 $p = \mu$로 둔 식과 같으므로, 같은 t로 최소화하면 $e^{-nD(a\|\mu)}$이다. 정리 8.2의 증명이 그대로 이어져 $P(|\bar X_n - \mu| \ge \varepsilon) \le 2e^{-2n\varepsilon^2}$를 얻는다. 이것이 노트 8.1절 끝에서 말한 일반적인 Hoeffding 부등식이다.

D

퀄형

여러 절과 앞 회차의 도구를 잇는 종합 문제다. 머리의 제한 시간을 재고, 노트를 덮고 푼다. 기댓값이 유한하다는 것을 먼저 보이는 것부터 답안의 일부다.

D1 무작위 걸음이 멈출 때까지 ★★★

[T5] · 정리 1.13, 1회 정리 4.7, 5.13 · 제한 40분

판마다 1원을 따거나 잃을 확률이 $\frac{1}{2}$씩이고 판들은 독립이다. 가진 돈이 i원$(0<i<N)$에서 시작해 0원이나 N원이 되면 멈춘다. 멈출 때까지의 판 수를 T, 그 기댓값을 $e_i = E_iT$라 하고 $e_0 = e_N = 0$으로 둔다.

(a) $P_i(T > mN) \le (1-2^{-N})^m$을 보이고, 꼬리 공식으로 $e_i < \infty$임을 보여라.

(b) $k \ge 0$에서 $P_i(T > k+1) = \frac{1}{2}P_{i+1}(T>k) + \frac{1}{2}P_{i-1}(T>k)$임을 첫 판에 대한 전확률 공식으로 보이고, k에 대해 더해 $e_i = 1 + \frac{1}{2}e_{i+1} + \frac{1}{2}e_{i-1}$ $(0<i<N)$을 얻어라.

(c) 이 재귀와 경계조건을 만족하는 수열은 $e_i = i(N-i)$ 하나뿐임을 보여라.

(d) $N=10$, $i=3$이면 e_3은 얼마인가?

풀이 (a) m개의 겹치지 않는 묶음(판 $1\text{–}N, N+1\text{–}2N, \dots$) 가운데 하나라도 N판 모두 이기면 그 안에서 N원에 닿아 멈춘다. 그러므로 $\{T > mN\}$이면 각 묶음은 "모두 승"이 아니었고, 묶음들은 독립이므로 $P_i(T>mN) \le (1-2^{-N})^m$이다. $P_i(T>k)$는 k에 대해 감소하므로 꼬리 공식으로

$$e_i = \sum_{k\ge 0} P_i(T>k) \le \sum_{m\ge 0} N\,P_i(T>mN) \le \frac{N}{1-(1-2^{-N})} = N2^N < \infty.$$

(정리 1.13(a)의 $\sum_{k\ge1}P(T\ge k) = \sum_{k\ge0}P(T>k)$이다.)

(b) H를 첫 판을 이기는 사건이라 하자. 첫 판을 이기면 남은 판들은 첫 판과 독립이고 $i+1$원에서 시작한 게임과 같으므로 $P_i(T>k+1 \mid H) = P_{i+1}(T>k)$이다($T$에서 첫 판을 뺀 판 수가 k를 넘는다). 전확률 공식으로 주어진 식이다. $i\pm1 \in \{0,N\}$이면 그쪽 항은 0이다. $k=0,1,2,\dots$ 에 대해 더하면, 음이 아닌 항이고 (a)로 모두 유한하므로

$$e_i = P_i(T>0) + \sum_{k\ge0} P_i(T>k+1) = 1 + \tfrac{1}{2}e_{i+1} + \tfrac{1}{2}e_{i-1}.$$

(c) 확인: $1 + \frac{1}{2}(i+1)(N-i-1) + \frac{1}{2}(i-1)(N-i+1) = 1 + \frac{1}{2}\big(2i(N-i)-2\big) = i(N-i)$이고 경계에서 0이다. 유일성: 두 해의 차 d_i는 $d_{i+1} - d_i = d_i - d_{i-1}$ $(0<i<N)$을 만족하므로 등차수열이고, $d_0 = d_N = 0$이면 모두 0이다 [T3].

(d) $3 \cdot 7 = 21$판이다. 가운데($i = 5$)에서 시작하면 25판으로 가장 길다.

최종답 (c) $i(N-i)$ (d) 21

D2 평균은 있고 분산은 없는 분포 ★★★

[T5] · 정의 1.1, 정리 5.1 · 제한 30분

$P(X=k) = \dfrac{c}{k(k+1)(k+2)}$, $k = 1, 2, \ldots$ 이다.

(a) $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$를 써서 c를 구하라.

(b) EX를 구하라.

(c) $EX^2 = \infty$임을 보여라. Chebyshev 부등식을 쓸 수 있는가?

(d) $P(X \geq 10)$을 정확히 구하라.

(e) Markov 부등식이 주는 $P(X \geq 10)$의 상한을 구하고 (d)와 비교하라.

풀이 (a) 부분합이 망원하므로 $\sum_{k \geq m} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m(m+1)}$이다 [T5]. $m = 1$이면 $\frac{1}{4}$이므로 $c = 4$이다. (b) $EX = 4\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 4\sum_{k \geq 1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$이다. 항이 음이 아니므로 절대수렴이다. (c) $EX^2 = 4\sum_{k} \frac{k}{(k+1)(k+2)}$이고 $k \geq 1$이면 $\frac{k}{k+1} \geq \frac{1}{2}$이므로 항은 $\frac{2}{k+2}$ 이상이다. 조화급수처럼 발산한다. 분산이 무한이므로 Chebyshev 부등식은 쓸 수 없다. (d) $P(X \geq 10) = 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{1}{55} \approx 0.018$. (e) Markov로는 $\frac{EX}{10} = \frac{1}{5}$이다. 실제 꼬리는 $P(X \geq m) \approx \frac{2}{m^2}$로 $\frac{1}{m}$보다 빨리 주므로 Markov 한계는 느슨하다.

최종답 (a) $c = 4$ (b) 2 (d) $\frac{1}{55}$ (e) $\frac{1}{5}$

D3 기억이 없는 분포 ★★★

[T3] · 정리 1.13, 1회 정리 5.2 · 제한 35분

(a) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$이면 $s, t > 0$에서 $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$임을 보여라.

(b) $Q = P(\cdot \mid X > s)$는 확률이다(1회 정리 5.2). Q 아래에서 $X - s \geq 0$이므로 꼬리 공식을 Q에 쓸 수 있다. $\int_0^\infty Q(X - s > t)\,dt$, 곧 "이미 s만큼 기다렸을 때 남은 기다림의 평균"을 구하라.

(c) 양의 정수값 X가 모든 정수 $m, n \geq 0$에서 $P(X > m+n \mid X > m) = P(X > n)$을 만족하면(조건의 확률이 양수일 때) X는 기하분포임을 보여라.

(d) X가 기하분포(성공 확률 p)이면 (b)와 같은 양 $\sum_{k \geq 0} Q(X - m > k)$는 얼마인가?

풀이 (a) $\{X > s+t\} \subset \{X > s\}$이므로 $P(X > s+t \mid X > s) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$이다. (b) (a)로 $Q(X - s > t) = e^{-\lambda t}$이므로 $\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$이다. 이미 기다린 시간과 상관없이 남은 기다림의 평균은 처음과 같다. (c) $g(n) = P(X > n)$으로 두면 조건부확률의 정의로 $g(m+n) = g(m)g(n)$이고 $g(0) = 1$이다. n에 대한 귀납법으로 $g(n) = g(1)^n =: r^n$이다 [T3]. $\{X > n\} \downarrow \varnothing$이므로 1회 정리 4.7로 $r^n \to 0$, 곧 $r < 1$이다. 따라서 $P(X = n) =$

$g(n-1)-g(n)=r^{n-1}(1-r)$이고, 성공 확률 $p=1-r$인 기하분포다($r=0$이면 확률 1로 $X=1$). (d) 같은 계산으로 $Q(X-m>k)=r^k=q^k$이고 꼬리 공식(정리 1.13(a))으로 $\sum_{k\ge 0}q^k=\frac{1}{p}$이다.

최종답 (b) $\frac{1}{\lambda}$ (d) $\frac{1}{p}$

D4 Bernstein 다항식과 Weierstrass의 정리 ★★★

[T5] · 정리 2.4, 6.2 · 제한 40분

f가 $[0,1]$에서 연속이고 $\|f\|=\max_{[0,1]}|f|$이다. $K\sim \mathrm{b}(n,p)$에 대해

$$B_n(p)=E\,f\!\left(\frac{K}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n} f\!\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

은 p의 다항식이다.

(a) $f(x)=x^2$이면 $B_n(p)=p^2+\frac{p(1-p)}{n}$임을 보여라.

(b) $\varepsilon>0$에 대해 $|x-y|<\delta$이면 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$인 δ가 있다(닫힌 구간의 연속함수는 균등연속이다). 이것으로 다음을 보여라.

$$|B_n(p)-f(p)|\le \varepsilon+2\|f\|\,P\!\left(\left|\frac{K}{n}-p\right|\ge\delta\right)\le \varepsilon+\frac{\|f\|}{2n\delta^2}$$

(c) $\max_{0\le p\le 1}|B_n(p)-f(p)|\to 0$임을 결론지어라. 연속함수는 다항식으로 균등하게 근사된다(Weierstrass, 1885).

풀이 (a) $E(K/n)^2=\frac{1}{n^2}(\mathrm{Var}\,K+(EK)^2)=\frac{1}{n^2}(npq+n^2p^2)=p^2+\frac{pq}{n}$이다. (b) 따름정리 5.10(a)의 $|EY|\le E|Y|$로 $|B_n(p)-f(p)|\le E|f(K/n)-f(p)|$이다. $A=\{|K/n-p|<\delta\}$ 위에서는 $|f(K/n)-f(p)|<\varepsilon$이고, A^c 위에서는 $\le 2\|f\|$이다. 따라서

$$E|f(K/n)-f(p)|\le \varepsilon\,P(A)+2\|f\|\,P(A^c)\le \varepsilon+2\|f\|\cdot\frac{pq}{n\delta^2}\le \varepsilon+\frac{\|f\|}{2n\delta^2}.$$

둘째 부등호에 정리 6.2(Chebyshev)를 썼다. (c) 오른쪽은 p에 의존하지 않으므로 $\max_p|B_n-f|\le\varepsilon+\frac{\|f\|}{2n\delta^2}$이고, $n\to\infty$에서 $\limsup_n\max_p|B_n-f|\le\varepsilon$이다. ε이 임의이므로 0으로 간다 [T5]. (a)의 예에서 오차는 정확히 $\frac{p(1-p)}{n}\le\frac{1}{4n}$이다. 대수의 법칙의 증명이 해석학의 정리를 주는 예다(S. Bernstein, 1912).

최종답 (a) $p^2+\frac{p(1-p)}{n}$