수리통계학 × 통계학의 역사

2회 워크북

기댓값과 대수의 법칙 손으로 푸는 34문항

강의노트 2회를 읽은 뒤 손으로 푼다. 기댓값, 분산, 적률생성함수는 계산을 손으로 해 봐야 식의 모양이 남는다. 부등식과 대수의 법칙의 증명은 빈 종이에 다시 써 봐야 어느 가정이 어디서 쓰이는지 보인다. 문제 아래의 줄 친 공간에 직접 쓴다.

부	하는 일	문항	예상 시간
A 계산 드릴	정의와 공식을 손으로 돌린다. 답이 수나 식으로 나온다	14	2시간
B 빈칸 증명	노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다	7	2시간 50분
C 증명 문제	변형, 일반화, 반례 만들기	9	2시간 40분
D 퀄형	여러 절을 잇는 종합 문제. 제한 시간 안에	4	2시간 25분
	합계	34	약 10시간

노트 `02_expectation_notes.pdf` — 문항의 "정리 5.9" 같은 번호는 노트의 번호다. "1회 정리 4.7"은 1회 노트의 번호다

도구 `00_toolkit_notes.pdf` — [T2] 귀류, [T3] 귀납, [T4] 부등식, [T5] 극한과 급수, [T6] 순서 바꾸기, [T7] 변수변환

검산 노트북 `02_expectation.ipynb`의 "워크북 검산" 절: `check("A3", "161/36")`

이 워크북을 쓰는 법

1. **노트를 덮고 푼다.** 문제의 머리 오른쪽에 쓸 도구, 관련 정리 번호, 예상 시간이 있다. 예상 시간의 두 배가 지나도 진척이 없으면 그때 노트를 편다.
2. **막히면 3단으로 본다.** 뒤의 **힌트와 최종답**에서 힌트를 먼저 본다. 다 푼 뒤에는 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나거나 증명이 막히면 풀이판을 본다.
3. **B부는 순서대로 푼다.** 같은 정리를 여러 번 만난다. 처음에는 근거만 빈칸이고(①), 다음에는 단계의 이름만 있고(②), 마지막에는 전략만 있다(③). 앞 단계의 답을 보면서 다음 단계를 쓰지 않는다.
4. **계산은 검산한다.** 최종답이 수나 식인 문항은 노트북의 `check()`에 넣으면 맞는지만 알려 준다. 정답은 보여 주지 않는다.
5. **증명은 근거를 단다.** 등호와 부등호마다 어느 정의, 정리, 도구를 썼는지 오른쪽에 적는다. 합과 기댓값, 극한과 적분의 순서를 바꾸는 곳에서는 그래도 되는 조건을 따로 확인한다.

표시 ★ 정의를 바로 쓰는 문제, ★★ 두세 단계를 잇는 문제, ★★★ 퀄에 나오는 길이의 문제. [T1]–[T8]은 증명 도구 상자의 도구 번호다.

예: 빈칸과 풀이 공간

① $X \geq 0$이고 $a > 0$이면 $P(X \geq a) \leq EX/a$이다. 왜? _____

A

계산 드릴

정의와 공식을 손으로 돌린다. 답이 수나 식으로 떨어지므로 다 풀면 뒤의 최종답이나 노트북의 `check()`로 맞춰 본다. 계산기는 마지막 수치에만 쓴다.

A1 이산 확률변수의 평균과 분산 ★

정의 1.1, 정리 2.2 · 8분

$P(X=-1)=0.2$, $P(X=0)=0.3$, $P(X=2)=0.5$이다. (a) EX, (b) $\operatorname{Var}X$를 정의 $E(X-\mu)^2$으로 직접 구하고 $EX^2-\mu^2$으로도 구하라. (c) $E(3X-1)$, (d) $\operatorname{Var}(3X-1)$을 구하라.

A2 밀도에서 적률 ★

정의 1.5, 정리 1.9 · 8분

X의 밀도가 $f(x)=3x^2$ $(0<x<1)$이다. (a) EX, (b) $\operatorname{Var}X$, (c) $E\frac{1}{X}$를 구하라. (c)를 $\frac{1}{EX}$와 비교하라.

A3 두 주사위의 최댓값 ★

정리 1.13(a) · 8분

공정한 주사위 두 개를 독립으로 던진 눈의 최댓값을 M이라 하자. 꼬리 공식으로 EM을 구하라.

A4 이웃한 두 에이스 ★

정리 1.11 · 8분

52장을 잘 섞어 한 줄로 늘어놓는다. 이웃한 두 자리 $(i, i+1)$ $(i = 1, \dots, 51)$ 가운데 두 장이 모두 에이스인 자리의 수의 기댓값을 구하라.

A5 나오지 않은 눈의 수 ★★

정리 1.11, 예제 2.9 · 12분

공정한 주사위를 10번 던져 한 번도 나오지 않은 눈의 수를 N이라 하자. (a) EN, (b) $\operatorname{Var} N$을 구하라.

A6 이항분포의 적률 ★

정리 2.4 · 6분

$K \sim \mathrm{b}(20, 0.3)$이다. (a) EK, (b) $\mathrm{Var}\,K$, (c) $E\,K(K-1)$, (d) EK^2을 구하라.

A7 mgf로 분포 알아보기 ★

정리 3.3, 3.6 · 8분

X의 mgf가 $M(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^t\right)^5$이다. (a) X의 분포와 그 근거를 말하라. (b) EX, (c) $\mathrm{Var}\,X$, (d) $P(X = 5)$를 구하라.

A8 mgf의 미분 ★

정리 3.3, 따름정리 3.4 · 8분

X의 mgf가 $M(t) = (1-2t)^{-3}$ $(t < \frac{1}{2})$이다. (a) EX, (b) $\mathrm{Var}\,X$, (c) EX^3을 구하라. (b)는 로그 mgf로 구하라.

A9 지수분포의 변환 ★★

정리 4.3, 정리 1.9 · 10분

$X \sim \text{Exp}(2)$, $Y = e^{-X}$이다. (a) 정리 4.3으로 Y의 밀도를 구하라. (b) EY를 (a)의 밀도로 구하고, 정리 1.9(b)로도 구하라.

A10 분위수 함수 ★★

보조정리 4.6, 정리 4.7, 1.13(b) · 10분

$F(x) = 1 - (1+x)^{-2}$ $(x \geq 0)$, $x < 0$에서 0인 분포함수가 있다. (a) $0 < u < 1$에서 $F^{-}(u)$를 구하라. (b) 중앙값을 구하라. (c) 꼬리 공식으로 EX를 구하라.

A11 두 한계 ★

정리 5.1, 5.3 · 6분

$X \geq 0$, $EX = 2$, $\text{Var}\, X = 1$이다. $P(X \geq 10)$의 상한을 (a) Markov 부등식으로, (b) Chebyshev 부등식으로 구하라.

A12 로그의 평균 ★

정리 5.9 · 8분

$X \sim \mathrm{U}(1,3)$이다. $E\log X$를 구하고 $\log EX$와 비교하라.

A13 불량률 조사의 표본 크기 ★★

정리 6.2, 8.2 · 10분

불량률 p를 $\hat{p}_n$으로 추정해 $P(|\hat{p}_n - p| \ge 0.01) \le 0.05$를 보장하고 싶다. 필요한 n을 (a) $pq \le \frac{1}{4}$을 쓴 Chebyshev 한계(정리 6.2)로, (b) $p \le 0.1$임을 미리 알 때의 Chebyshev 한계로, (c) Hoeffding 부등식(정리 8.2)으로 구하라.

A14 연속형 꼬리 공식 ★

정리 1.13(b) · 8분

$X \ge 0$이고 $P(X > x) = (1+x)^{-3}$ $(x \ge 0)$이다. (a) EX, (b) 중앙값을 구하라.

B

빈칸 증명

노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다. 같은 정리를 여러 번 만나며 도움이 줄어든다. ① 단계는 주어지고 근거만 빈칸이다. ② 단계의 이름만 주어진다. ③ 전략만 주어진다. 근거에는 정의나 정리의 번호, 도구 번호를 쓴다.

B1 꼬리 공식, 근거 채우기 ★

① · 정리 1.13(b) · 15분

$X \geq 0$이 밀도 f를 가지면 $EX = \int_0^\infty P(X > x)\,dx$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $P(X > x) = \int_x^\infty f(t)\,dt$이다. 왜? _____

② 영역 $\{0 \leq x < t\}$ 위에서 $f(t)$를 두 순서로 적분한다.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P(X > x)\,dx &= \int_0^\infty \int_x^\infty f(t)\,dt\,dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t dx \right) f(t)\,dt \qquad \text{왜? } _____ \\ &= \int_0^\infty t\,f(t)\,dt = EX \qquad \text{왜? } _____ \end{aligned}$$

③ $P(X > x) = 1 - F(x)$이다. 왜? _____

마지막으로, 순서를 바꿀 때 쓴 조건은 무엇이고 부호가 섞인 X에 이 계산을 그대로 쓸 수 없는 이유는 무엇인지 두 줄로 써라.

B2 Jensen 부등식, 근거 채우기 ★★

① · 정리 5.9 · 15분

φ가 열린 구간 I에서 볼록이고 $P(X \in I) = 1$, $E|X| < \infty$, $E|\varphi(X)| < \infty$이면 $\varphi(EX) \le E\varphi(X)$이다. 근거를 채워라.

① $\mu = EX$는 I 안에 있다. 끝점이면 $X - \alpha > 0$인데 $E(X-\alpha) = 0$이 되어 모순이다.
왜? _____

② I에서 $\varphi(x) \ge \ell(x) = \varphi(\mu) + b(x-\mu)$인 b가 있다. 왜? _____

③ $E\,\varphi(X) \ge E\,\ell(X)$이다. 왜? _____

④ $E\,\ell(X) = \varphi(\mu) + b(EX - \mu) = \varphi(\mu)$이다. 왜? _____

⑤ ③에서 $E\,\ell(X)$가 존재한다. 왜? _____

B3 확률적분변환, 근거 채우기 ★★

① · 정리 4.7(b) · 20분

F가 연속인 분포함수이면 $F(X) \sim \mathrm{U}(0,1)$이다. $0 < u < 1$을 고정한다. 근거를 채워라.

① $\{F(X) < u\} = \{X < F^{-}(u)\}$이다. 왜? _____

② $P(X < F^{-}(u)) = F(F^{-}(u))$이다. 왜? _____

③ $F(F^{-}(u)) \ge u$이다. 왜? _____

④ $F(F^{-}(u)) \le u$이다. 왜? _____

⑤ $P(F(X) \le u) = \lim_{n} P\big(F(X) < u + \tfrac{1}{n}\big) = u$이다. 왜? _____

B4 꼬리 공식, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 1.13 · 25분

정리 1.13의 (a)와 (b)를 증명하라. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① **(a) $P(X \ge k)$를 확률질량함수의 합으로 쓴다**

② **이중합으로 쓰고 항 $p(j)$가 몇 번 나오는지 센다**

③ **순서를 바꿔 EX를 얻는다**

④ **(b) $P(X > x)$를 밀도의 적분으로 쓴다**

⑤ **적분 영역을 그리고 순서를 바꾼다**

⑥ **조건 확인: 순서를 바꿀 수 있는 근거**

B5 Jensen 부등식, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 5.9 · 25분

정리 5.9를 증명하라. 보조정리 5.8(받침선)은 써도 된다.

① **$\mu = EX$가 I 안에 있음을 보인다**

② **받침선을 잡는다**

③ **단조성으로 기댓값을 비교한다**

④ **받침선의 기댓값을 계산한다**

⑤ **조건 확인: 두 기댓값이 존재하는가**

⑥ **오목인 경우**

B6 받침선과 Jensen, 전략만 ★★★ ③ · 보조정리 5.8, 정리 5.9 · 35분

보조정리 5.8과 정리 5.9를 모두 증명하라.

전략 볼록이면 μ 왼쪽의 기울기들이 오른쪽의 기울기들보다 작다. 그 사이의 기울기 b로 받침선을 만들고, 받침선의 기댓값을 계산한다.

B7 역변환 표집과 확률적분변환, 전략만 ★★★ ③ · 보조정리 4.6, 정리 4.7 · 35분

보조정리 4.6과 정리 4.7의 (a)(b)를 모두 증명하라.

전략 하한의 정의와 F의 오른쪽 연속성으로 $F(F^{-}(u)) \geq u$를 얻는 것이 보조정리의 전부다. 정리는 이 보조정리로 사건을 바꿔 쓴다.

C

증명 문제

노트의 정리를 변형하고, 일반화하고, 반례로 경계를 확인한다. 증명은 노트의 단계형 모양으로 쓴다. 한 줄에 한 단계, 줄마다 근거. 기댓값과 합·극한의 순서를 바꾸는 곳에서는 조건을 따로 확인한다.

C1 유계인 확률변수의 분산 ★★

[T4] · 정리 2.2(c), 따름정리 5.6 · 15분

$P(a \le X \le b) = 1$이면 $\operatorname{Var} X \le \frac{(b-a)^2}{4}$임을 보여라. 등호는 언제 성립하는가?

C2 곱의 기댓값이 갈라져도 독립은 아니다 ★

[T2] · 정리 2.7, 2.8 · 10분

X가 $-1, 0, 1$을 같은 확률로 갖고 $Y = X^2$이다.

(a) $E(XY) = EX \cdot EY$임을 보여라.

(b) X와 Y가 독립이 아님을 보여라.

(c) $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$인가? 정리 2.8의 증명에서 실제로 쓰인 가정이 무엇인지와 연결해 설명하라.

C3 평균이 있으면 꼬리는 $1/x$보다 빨리 준다 ★★

[T5], [T6] · 정리 1.13 · 20분

(a) $X \geq 0$이 밀도 f를 갖고 $EX < \infty$이면 $x\,P(X > x) \to 0$ $(x \to \infty)$임을 보여라.

(b) 거꾸로는 성립하지 않는다. $x \geq e$에서 $P(X > x) = \dfrac{e}{x \log x}$, $x < e$에서 $P(X > x) = 1$인 X가 있다. 이것이 분포함수를 주는지 확인하고, $x\,P(X > x) \to 0$이지만 $EX = \infty$임을 보여라.

C4 Jensen의 등호 ★★★

[T2], [T4] · 보조정리 5.8, 정리 5.9 · 25분

φ가 열린 구간 I에서 **순볼록**이다. 곧 $x \neq y$, $0 < \lambda < 1$이면 $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$이다. 정리 5.9의 가정 아래 $\varphi(EX) = E\varphi(X)$이면 $P(X = EX) = 1$임을 보여라.

C5 분위수 함수의 성질 ★★

[T5] · 보조정리 4.6 · 15분

분포함수 F의 분위수 함수 $F^{-}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$ $(0 < u < 1)$에 대해 (a) F^{-}가 비감소임을, (b) F^{-}가 왼쪽 연속임을 보여라. (c) $X \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$이면 F^{-}는 어떤 함수인가? (b)와 맞는지 확인하라.

C6 연속함수는 확률수렴을 보존한다 ★★

[T5] · 정의 6.1, 정리 6.2 · 15분

$Y_n \xrightarrow{P} c$이고 g가 c에서 연속이면 $g(Y_n) \xrightarrow{P} g(c)$임을 보여라. 이것으로 $\hat{p}_n(1-\hat{p}_n) \xrightarrow{P} p(1-p)$와 $\sqrt{\hat{p}_n} \xrightarrow{P} \sqrt{p}$를 결론지어라.

C7 닮은 관측의 대수의 법칙 ★★

[T5] · 정리 2.8의 증명, 정리 6.3 · 20분

이산 확률공간 위의 $X_1, X_2, \dots$ 가 모두 평균 μ, 분산 σ^2을 갖고, $D_i = X_i - \mu$에 대해 $E(D_i D_j) = \sigma^2 \rho^{|i-j|}$ $(|\rho| < 1)$이다.

(a) $\operatorname{Var} \bar{X}_n = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho^{|i-j|} \le \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$ 임을 보여라.

(b) $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$임을 보여라.

(c) $\rho = \frac{1}{2}$이면 $\lim_n n \operatorname{Var} \bar{X}_n / \sigma^2$은 얼마인가? 서로 닮은 관측 n개는 독립인 관측 몇 개만큼의 정보를 갖는가?

C8 성공 수가 짝수일 확률 ★★

예제 3.8 · 15분

$K \sim \mathrm{b}(n,p)$이고 $G(z) = E\,z^K$가 확률생성함수다. (a) $G(z) = (q+pz)^n$임을 보여라. (b) $P(K\text{가 짝수}) = \frac{1}{2}\big(1+(q-p)^n\big)$임을 보여라. (c) $n=10$, $p=0.3$이면 이 확률은 얼마인가?

C9 $[0,1]$ 값의 mgf와 Chernoff 한계 ★★★

[T4] · 정리 8.1, 3.6 · 25분

X가 확률 1로 $[0,1]$에 있고 $EX=\mu$이다.

(a) $0 \le x \le 1$이면 $e^{tx} \le (1-x) + x\,e^t$임을 볼록성으로 보여라.

(b) $M_X(t) \le 1-\mu+\mu e^t$임을 보여라. 오른쪽은 어떤 분포의 mgf인가?

(c) $X_1,\dots,X_n$이 독립인 이산 확률변수이고 모두 (b)의 조건을 만족하면, $\mu < a < 1$에서 $P(\bar X_n \ge a) \le e^{-nD(a\|\mu)}$임을 정리 8.1의 증명을 따라 보여라.

D

퀄형

여러 절과 앞 회차의 도구를 잇는 종합 문제다. 머리의 제한 시간을 재고, 노트를 덮고 푼다. 기댓값이 유한하다는 것을 먼저 보이는 것부터 답안의 일부다.

D1 무작위 걸음이 멈출 때까지 ★★★

[T5] · 정리 1.13, 1회 정리 4.7, 5.13 · 제한 40분

판마다 1원을 따거나 잃을 확률이 $\frac{1}{2}$씩이고 판들은 독립이다. 가진 돈이 i원$(0 < i < N)$에서 시작해 0원이나 N원이 되면 멈춘다. 멈출 때까지의 판 수를 T, 그 기댓값을 $e_i = E_i T$라 하고 $e_0 = e_N = 0$으로 둔다.

(a) $P_i(T > mN) \le (1 - 2^{-N})^m$을 보이고, 꼬리 공식으로 $e_i < \infty$임을 보여라.

(b) $k \ge 0$에서 $P_i(T > k+1) = \frac{1}{2}P_{i+1}(T > k) + \frac{1}{2}P_{i-1}(T > k)$임을 첫 판에 대한 전확률 공식으로 보이고, k에 대해 더해 $e_i = 1 + \frac{1}{2}e_{i+1} + \frac{1}{2}e_{i-1}$ $(0 < i < N)$을 얻어라.

(c) 이 재귀와 경계조건을 만족하는 수열은 $e_i = i(N - i)$ 하나뿐임을 보여라.

(d) $N = 10$, $i = 3$이면 e_3은 얼마인가?

D2 평균은 있고 분산은 없는 분포 ★★★

[T5] · 정의 1.1, 정리 5.1 · 제한 30분

$P(X=k)=\dfrac{c}{k(k+1)(k+2)}$, $k=1,2,\dots$ 이다.

(a) $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$를 써서 c를 구하라.

(b) EX를 구하라.

(c) $EX^2=\infty$임을 보여라. Chebyshev 부등식을 쓸 수 있는가?

(d) $P(X\ge 10)$을 정확히 구하라.

(e) Markov 부등식이 주는 $P(X\ge 10)$의 상한을 구하고 (d)와 비교하라.

D3 기억이 없는 분포 ★★★

[T3] · 정리 1.13, 1회 정리 5.2 · 제한 35분

(a) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$이면 $s, t > 0$에서 $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$임을 보여라.

(b) $Q = P(\cdot \mid X > s)$는 확률이다(1회 정리 5.2). Q 아래에서 $X - s \geq 0$이므로 꼬리 공식을 Q에 쓸 수 있다. $\int_0^\infty Q(X - s > t)\,dt$, 곧 "이미 s만큼 기다렸을 때 남은 기다림의 평균"을 구하라.

(c) 양의 정수값 X가 모든 정수 $m, n \geq 0$에서 $P(X > m+n \mid X > m) = P(X > n)$을 만족하면(조건의 확률이 양수일 때) X는 기하분포임을 보여라.

(d) X가 기하분포(성공 확률 p)이면 (b)와 같은 양 $\sum_{k \geq 0} Q(X - m > k)$는 얼마인가?

D4 Bernstein 다항식과 Weierstrass의 정리 ★★★

[T5] · 정리 2.4, 6.2 · 제한 40분

f가 $[0,1]$에서 연속이고 $\|f\| = \max_{[0,1]} |f|$이다. $K \sim \mathrm{b}(n, p)$에 대해

$$B_n(p) = E\, f\!\left(\frac{K}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\!\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

은 p의 다항식이다.

(a) $f(x) = x^2$이면 $B_n(p) = p^2 + \frac{p(1-p)}{n}$임을 보여라.

(b) $\varepsilon > 0$에 대해 $|x-y| < \delta$이면 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$인 δ가 있다(닫힌 구간의 연속함수는 균등연속이다). 이것으로 다음을 보여라.

$$|B_n(p) - f(p)| \le \varepsilon + 2\|f\|\, P\!\left(\left|\frac{K}{n} - p\right| \ge \delta\right) \le \varepsilon + \frac{\|f\|}{2n\delta^2}$$

(c) $\max_{0\le p\le 1} |B_n(p) - f(p)| \to 0$임을 결론지어라. 연속함수는 다항식으로 균등하게 근사된다(Weierstrass, 1885).

힌트와 최종답

막히면 먼저 힌트를 보고, 다 푼 뒤에 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나면 풀이판을 본다. 최종답은 노트북의 `check()`로도 확인할 수 있다.

A1 힌트 (c)(d)는 다시 계산하지 말고 정리 2.2(b)와 선형성을 쓴다.

답 (a) 0.8 (b) 1.56 (c) 1.4 (d) 14.04

A2 힌트 (c)는 정리 1.9(b)로 $\int_0^1 \frac{1}{x}\cdot 3x^2\,dx$이다. 비교는 Jensen의 따름정리 5.10(b)와 맞아야 한다.

답 (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{3}{80}$ (c) $\frac{3}{2}$

A3 힌트 $P(M \ge k) = 1 - P(M \le k-1)$이고, $\{M \le j\}$는 두 눈이 모두 j 이하인 사건이다.

답 $\frac{161}{36} \approx 4.47$

A4 힌트 자리마다 지시변수를 두고 선형성을 쓴다. 지시변수들이 독립이 아니어도 된다.

답 $\frac{3}{13}$

A5 힌트 $N = \sum_{j=1}^{6} \mathbf{1}_{B_j}$, $B_j = \{\text{눈 } j\text{가 한 번도 안 나온다}\}$. 예제 2.9의 Montmort처럼 $EN(N-1) = \sum_{j\neq k} P(B_jB_k)$를 쓴다.

답 (a) $6(5/6)^{10} \approx 0.969$ (b) ≈ 0.550

A6 힌트 (c)는 $n(n-1)p^2$이고, (d)는 $K^2 = K(K-1)+K$이다.

답 (a) 6 (b) 4.2 (c) 34.2 (d) 40.2

A7 힌트 예제 3.2의 이항분포 mgf와 맞춰 본다. (d)는 $M(t)$를 e^t의 다항식으로 전개했을 때 e^{5t}의 계수다.

답 (b) $\frac{10}{3}$ (c) $\frac{10}{9}$ (d) $\frac{32}{243}$

A8 힌트 $\psi(t) = -3\log(1-2t)$이면 $\psi'(t) = \frac{6}{1-2t}$이다.

답 (a) 6 (b) 12 (c) 480

A9 힌트 $g(x) = e^{-x}$는 $(0,\infty)$에서 감소하고 $T = (0,1)$, $h(y) = -\log y$이다.

답 (a) $f_Y(y) = 2y$ $(0<y<1)$ (b) $\frac{2}{3}$

A10 힌트 F가 $[0,\infty)$에서 연속이고 순증가이므로 $F^{-} = F^{-1}$이다.

답 (a) $(1-u)^{-1/2}-1$ (b) $\sqrt{2}-1$ (c) 1

A11 힌트 (b)는 $\{X \ge 10\} \subset \{|X-2| \ge 8\}$이다.

답 (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{64}$

A12 힌트 $\int \log x\,dx = x\log x - x$이다.

답 $\frac{1}{2}(3\log 3 - 2) \approx 0.648$

A13 힌트 (b) $p \le 0.1 < \frac{1}{2}$이면 $pq = p(1-p) \le 0.1 \cdot 0.9$이다. (c) $2e^{-2n\varepsilon^2} \le 0.05$를 n에 대해 푼다.

답 (a) 50,000 (b) 18,000 (c) 18,445

A14 힌트 (a)는 밀도를 구하지 않고 꼬리를 바로 적분한다.

답 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $2^{1/3}-1 \approx 0.260$

B1 힌트 둘째 단계의 둘째 줄에서 영역을 t를 먼저 고정해 읽는다. 0부터 t까지의 x가 남는다.

B2 힌트 근거는 짧게 쓴다. ⑤는 $|\ell(x)| \le |\varphi(\mu)| + |b|(|x|+|\mu|)$에서 나온다.

B3 힌트 F의 연속성은 두 번 쓰인다. 한 번은 $P(X<x) = P(X \le x)$에, 한 번은 $F(F^{-}(u)) \le u$에.

B4 힌트 B1에서 채운 근거를 다시 보지 않고 쓴다. (a)에서 $\sum_{k=1}^{j} 1 = j$가 기댓값의 "값"을 만든다.

B5 힌트 첫 단계는 B2의 풀이에 있는 Markov와 연속성의 논리다. 끝점이 $\pm\infty$이면 확인할 것이 없다.

B6 힌트 보조정리는 두 단계다. (1) $x<\mu<y$에서 기울기의 부등식을 볼록성에 $\lambda = \frac{y-\mu}{y-x}$를 넣어 얻는다. (2) 왼쪽 기울기들의 상한을 b로 잡는다.

B7 힌트 보조정리의 ($\Rightarrow$)에서 먼저 집합 $\{x : F(x) \ge u\}$가 비어 있지 않고 아래로 유계임을 1회 정리 6.3(b)로 확인한다.

C1 힌트 정리 2.2(c)에서 c를 구간의 가운데로 잡는다. 등호의 경우는 "음이 아닌 확률변수의 기댓값이 0이면 그 변수는 확률 1로 0" (노트 연습 5.8)을 쓴다.

C2 힌트 (b) 정의 2.6의 식이 한 점 (x,y)에서라도 깨지면 된다. (c)는 교차항 $E(D_X D_Y)$를 계산

한다.

C3 힌트 (a) $x\,P(X>x) = x\int_x^\infty f(t)\,dt \le \int_x^\infty t\,f(t)\,dt$이고, 오른쪽은 수렴하는 적분의 꼬리다. (b) 꼬리 공식과 $\frac{d}{dx}\log\log x = \frac{1}{x\log x}$.

C4 힌트 받침선 ℓ이 μ 밖의 점 x_0에서 그래프에 닿으면, x_0과 μ의 중점에서 순볼록성과 모순이다(귀류). 그러면 $\varphi(X)-\ell(X)$는 음이 아니고 기댓값이 0이다.

C5 힌트 (b) $u_n \uparrow u$이면 $F^-(u_n)$은 증가하고 $F^-(u)$ 이하이므로 극한 L이 있다. $L \ge F^-(u)$를 보이려면 보조정리 4.6을 $F^-(u_n) \le L$에 쓴다.

C6 힌트 $\varepsilon>0$에 대해 연속성의 δ를 잡으면 $\{|g(Y_n)-g(c)|\ge\varepsilon\}\subset\{|Y_n-c|\ge\delta\}$이다.

C7 힌트 (a) 정리 2.8의 증명 ②의 전개는 독립을 쓰지 않는다. $\sum_{i,j}|\rho|^{|i-j|} \le n\bigl(1+2\sum_{k\ge1}|\rho|^k\bigr)$. (c) $\frac{1}{n}\sum_{i,j}\rho^{|i-j|} = 1+2\sum_{k=1}^{n-1}\bigl(1-\frac{k}{n}\bigr)\rho^k$.

답 (c) 3

C8 힌트 (b) $G(1)+G(-1) = \sum_k P(K=k)\bigl(1+(-1)^k\bigr)$이다.

답 (b) $\frac{1}{2}\bigl(1+(q-p)^n\bigr)$ (c) ≈ 0.50005

C9 힌트 (a) $x=(1-x)\cdot0+x\cdot1$로 보고 $s\mapsto e^{ts}$의 볼록성을 쓴다. (c) Chernoff 한계(따름정리 5.2)와 정리 3.6(b) 뒤에는 이항분포와 같은 식이 남는다.

D1 힌트 (a) 겹치지 않는 N판 묶음 안에서 N번 연속으로 따면 반드시 멈춘다. $P(T>k)$는 k에 대해 감소하므로 $\sum_k P(T>k) \le N\sum_m P(T>mN)$. (b) 첫 판 뒤의 게임은 $i\pm1$원에서 새로 시작한 게임과 같다(1회 정리 5.13의 논리). (c) 두 해의 차는 이차 차분이 0인 수열이다.

답 (c) $i(N-i)$ (d) 21

D2 힌트 망원 합 $\sum_{k\ge m}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2m(m+1)}$. (b)도 망원 합이다. (c)는 $\frac{k}{k+1}\ge\frac{1}{2}$ $(k\ge1)$.

답 (a) $c=4$ (b) 2 (d) $\frac{1}{55}$ (e) $\frac{1}{5}$

D3 힌트 (c) $g(n)=P(X>n)$이면 $g(m+n)=g(m)g(n)$, $g(0)=1$이다. n에 대한 귀납법으로 $g(n)=g(1)^n$. 그다음 $g(1)=1$일 수 없음을 1회 정리 4.7로 보인다.

답 (b) $\frac{1}{\lambda}$ (d) $\frac{1}{p}$

D4 힌트 (b) $E|f(K/n)-f(p)|$를 $\{|K/n-p|<\delta\}$와 그 여사건 위로 나눈다. 둘째 부등호는 정리 6.2. 한계가 p에 의존하지 않는 것이 (c)의 "균등"이다.

답 (a) $p^2+\frac{p(1-p)}{n}$