수리통계학 × 통계학의 역사

1회 워크북 — 풀이판

확률이란 무엇인가
손으로 푸는 34문항

학생판과 같은 문제에 빈칸의 답과 완전한 풀이를 붙였다. 학생판으로 먼저 풀고, 힌트와 최종답으로도 막힐 때 이 판을 본다.

부	하는 일	문항	예상 시간
A 계산 드릴	정의와 공식을 손으로 돌린다. 답이 수나 식으로 나온다	14	2시간
B 빈칸 증명	노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다	7	2시간 50분
C 증명 문제	변형, 일반화, 반례 만들기	9	2시간 35분
D 퀄형	여러 절을 잇는 종합 문제. 제한 시간 안에	4	2시간 20분
	합계	34	약 10시간

노트 `01_probability_notes.pdf` — 문항의 "정리 4.7" 같은 번호는 노트의 번호다

도구 `00_toolkit_notes.pdf` — [T1] 원소 추적, [T2] 귀류, [T3] 귀납, [T5] 극한과 급수

검산 노트북 `01_probability.ipynb`의 "워크북 검산" 절: `check("A3", "1/2")`

이 워크북을 쓰는 법

1. **노트를 덮고 푼다.** 문제의 머리 오른쪽에 쓸 도구, 관련 정리 번호, 예상 시간이 있다. 예상 시간의 두 배가 지나도 진척이 없으면 그때 노트를 편다.
2. **막히면 3단으로 본다.** 뒤의 **힌트와 최종답**에서 힌트를 먼저 본다. 다 푼 뒤에는 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나거나 증명이 막히면 풀이판을 본다.
3. **B부는 순서대로 푼다.** 같은 정리를 세 번 만난다. 처음에는 근거만 빈칸이고(①), 다음에는 단계의 이름만 있고(②), 마지막에는 전략만 있다(③). 앞 단계의 답을 보면서 다음 단계를 쓰지 않는다.
4. **계산은 검산한다.** 최종답이 수나 식인 문항은 노트북의 `check()`에 넣으면 맞는지만 알려 준다. 정답은 보여 주지 않는다.
5. **증명은 근거를 단다.** 등호와 부등호마다 어느 공리, 정의, 정리를 썼는지 오른쪽에 적는다. 노트의 단계형 증명과 같은 모양이다.

표시 ★ 정의를 바로 쓰는 문제, ★★ 두세 단계를 잇는 문제, ★★★ 퀄에 나오는 길이의 문제. [T1]–[T8]은 증명 도구 상자의 도구 번호다.

A

계산 드릴

정의와 공식을 손으로 돌린다. 답이 수나 식으로 떨어지므로 다 풀면 뒤의 최종답이나 노트북의 `check()`로 맞춰 본다. 계산기는 마지막 나눗셈에만 쓴다.

A1 MISSISSIPPI의 배열 ★

정리 1.1, 1.4 · 6분

MISSISSIPPI의 11글자를 한 줄로 늘어놓는 서로 다른 배열의 수를 구하라. 같은 글자끼리는 구별하지 않는다.

풀이 배열 하나는 M이 들어갈 자리 1개, I가 들어갈 자리 4개, S가 들어갈 자리 4개, P가 들어갈 자리 2개를 정하는 것과 같다. 자리를 차례로 고르면 곱의 법칙으로

$$\binom{11}{1}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2} = 11 \cdot 210 \cdot 15 \cdot 1 = 34{,}650.$$

같은 글자를 구별해 $11!$가지로 센 뒤 I끼리, S끼리, P끼리 바꾸는 $4!\,4!\,2!$가지로 나눠도 $39{,}916{,}800/1{,}152 = 34{,}650$이다.

최종답 34,650

A2 음이 아닌 정수해의 수 ★

정리 1.4 · 8분

음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4로 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$을 만족하는 해 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 수를 구하라.

풀이 해 $(x_1, \dots, x_4)$에 별 x_1개, 막대, 별 x_2개, 막대, 별 x_3개, 막대, 별 x_4개를 차례로 놓은 길이 13의 줄을 대응시킨다. 거꾸로 별 10개와 막대 3개의 줄이 주어지면 막대 사이의 별의 수가 해를 하나 정한다. 이 대응은 일대일이고 전사이므로 해의 수는 13자리 가운데 막대 3개의 자리를 고르는 방법의 수다.

$$\binom{13}{3} = 286.$$

최종답 $\binom{13}{3} = 286$

A3 세 주사위의 합 ★

따름정리 4.10 · 8분

공정한 주사위 세 개를 던진다. 눈의 합이 10 이하일 확률을 구하라. 216가지를 모두 세지 말고 대칭을 써라.

풀이 $\phi(a,b,c) = (7-a, 7-b, 7-c)$는 $\{1,\dots,6\}^3$에서 자기 자신으로 가는 일대일 대응이다($\phi \circ \phi$가 항등함수). 합이 s인 결과를 합이 $21-s$인 결과로 보내므로, $\{\text{합} \le 10\}$을 $\{\text{합} \ge 11\}$ 위로 일대일로 보낸다. 두 사건은 서로소이고 합집합이 전체이므로 원소 수가 같고 각각 108개다. 고전적 정의(따름정리 4.10)로 확률은 $108/216 = \frac{1}{2}$이다.

최종답 $\frac{1}{2}$

A4 2, 3, 5로 나누어떨어지지 않는 수 ★

정리 4.5 · 10분

1부터 1000까지의 정수 가운데 2, 3, 5 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는 수는 몇 개인가?

풀이 $\{1,\dots,1000\}$ 위의 균등 확률에 포함배제(정리 4.5)를 쓰고 1000을 곱하면, 원소 수에 대해서도 같은 식이 성립한다. $|A_d| = \lfloor 1000/d \rfloor$이고, d와 e가 서로소이면 $A_d \cap A_e = A_{de}$이다.

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = (500 + 333 + 200) - (166 + 100 + 66) + 33 = 734.$$

따라서 구하는 수는 $1000 - 734 = 266$이다. 30개마다 8개$(1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29)$가 남으므로 $1000 \cdot \frac{8}{30} \approx 266.7$에 가까운 것이 맞다.

최종답 266

A5 모든 눈이 나올 확률 ★★

정리 4.5 · 12분

공정한 주사위를 n번 던져 1부터 6까지의 눈이 모두 적어도 한 번 나올 확률을 p_n이라 하자.

(a) p_6을 직접 세어 구하라.

(b) 포함배제로 다음을 보이고 p_{10}을 구하라.

$$p_n = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} \left(1 - \frac{k}{6}\right)^n$$

풀이 (a) 여섯 번에 여섯 눈이 모두 나오려면 각 눈이 정확히 한 번씩 나와야 하므로, 결과는 1부터 6의 순열이다. $p_6 = 6!/6^6 = 720/46{,}656 = \frac{5}{324} \approx 0.0154$.

(b) $B_i = \{\text{눈 } i\text{가 한 번도 나오지 않는다}\}$이면 $\{\text{모든 눈이 나온다}\} = (B_1 \cup \cdots \cup B_6)^c$이다. 첨자 $i_1 < \cdots < i_k$를 고르면 $B_{i_1} \cdots B_{i_k}$는 매번 나머지 $6-k$개의 눈만 나오는 결과들이므로

$P(B_{i_1}\cdots B_{i_k}) = (6-k)^n/6^n$이고, $S_k = \binom{6}{k}(1-\frac{k}{6})^n$이다. 포함배제로

$$p_n = 1 - \sum_{k=1}^{6}(-1)^{k+1}S_k = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k\binom{6}{k}\left(1-\frac{k}{6}\right)^n.$$

$n=10$이면 $p_{10} = \frac{16{,}435{,}440}{60{,}466{,}176} = \frac{38045}{139968} \approx 0.2718$이다. $n=6$을 넣으면 (a)의 $\frac{5}{324}$가 다시 나온다.

최종답 (a) $\frac{5}{324} \approx 0.0154$ (b) $\frac{38045}{139968} \approx 0.2718$

A6 합이 8일 때 ★

정의 5.1 · 6분

공정한 주사위 두 개를 던져 눈의 합이 8이었다. 적어도 한 주사위가 6일 조건부확률을 구하라.

풀이 합이 8인 순서쌍은 $(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$의 5개이고 각각 확률 $\frac{1}{36}$이다. 이 가운데 6이 있는 것은 2개이므로 $P(\text{6이 있다} \mid \text{합}=8) = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$이다.

최종답 $\frac{2}{5}$

A7 세 공장의 불량품 ★

정리 5.4, 5.5 · 8분

한 부품을 공장 I, II, III이 각각 50%, 30%, 20% 만든다. 불량률은 각각 1%, 2%, 5%다. (a) 무작위로 고른 부품이 불량일 확률을 구하라. (b) 불량품 하나가 공장 III에서 왔을 확률을 구하라.

풀이 D를 불량, B_1, B_2, B_3을 각 공장이라 하자. (a) 전확률 공식(정리 5.4)으로

$$P(D) = 0.5\cdot 0.01 + 0.3\cdot 0.02 + 0.2\cdot 0.05 = 0.005 + 0.006 + 0.010 = 0.021.$$

(b) 베이즈 정리(정리 5.5)로 $P(B_3 \mid D) = 0.010/0.021 = \frac{10}{21} \approx 0.476$이다. 공장 III은 생산의 20%이지만 불량품의 절반 가까이를 낸다.

최종답 (a) 0.021 (b) $\frac{10}{21} \approx 0.476$

A8 세 번 모두 빨강 ★★

정리 5.5, 5.11 · 8분

항아리 I에는 빨간 공 3개와 파란 공 2개, 항아리 II에는 빨간 공 1개와 파란 공 4개가 있다. 공정한 동전으로 항아리 하나를 고르고, 그 항아리에서 복원추출로 세 번 뽑았더니 모두 빨강이었다. 항아리 I을 골랐을 사후확률을 구하라. 사후 오즈 = 가능도비 × 사전 오즈의 식으로도 구하라.

풀이 H를 항아리 I을 고른 사건, R을 세 번 모두 빨강인 사건이라 하자. 항아리가 정해지면 추출은 독립이므로 $P(R \mid H) = (3/5)^3 = \frac{27}{125}$, $P(R \mid H^c) = (1/5)^3 = \frac{1}{125}$이다. 베이즈 정리로

$$P(H \mid R) = \frac{\frac{27}{125}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{27}{125}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{125}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{27}{28}.$$

오즈로는 사전 오즈 1에 가능도비 27을 곱한 사후 오즈 27이고, 확률로 바꾸면 $\frac{27}{28}$이다.

최종답 $\frac{27}{28}$

A9 독립인 두 사건 ★

정의 5.7, 정리 5.8 · 6분

A와 B가 독립이고 $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$이다. (a) $P(A \cup B)$, (b) $P(A \mid A \cup B)$, (c) $P(A^c \cap B^c)$를 구하라. (c)는 두 가지 방법으로 구하라.

풀이 (a) $P(A \cup B) = 0.3 + 0.4 - 0.3 \cdot 0.4 = 0.58$. (b) $A \subset A \cup B$이므로 $P(A \mid A \cup B) = 0.3/0.58 = \frac{15}{29}$. (c) 정리 5.8로 A^c와 B^c도 독립이므로 $0.7 \cdot 0.6 = 0.42$이다. De Morgan으로는 $P(A^cB^c) = 1 - P(A \cup B) = 0.42$로 같다.

최종답 (a) 0.58 (b) $\frac{15}{29}$ (c) 0.42

A10 직렬과 병렬 ★

정리 5.11 · 8분

부품 1과 2를 병렬로(둘 가운데 하나만 작동해도 된다) 묶고, 그 묶음을 부품 3과 직렬로(둘 다 작동해야 한다) 연결했다. 세 부품은 상호 독립으로 각각 확률 0.9로 작동한다. 시스템이 작동할 확률을 구하라.

풀이 W_i를 부품 i가 작동하는 사건이라 하면 시스템이 작동하는 사건은 $(W_1 \cup W_2) \cap W_3$이다. 정리 5.11로 $P(W_1 \cup W_2) = 1 - 0.1 \cdot 0.1 = 0.99$이다. $W_1 \cup W_2$와 W_3의 독립은 연습 5.6과 같은 논리로 나온다(W_1, W_2, W_3이 상호 독립이면 $W_1 \cup W_2$와 W_3은 독립). 따라서 $0.99 \cdot 0.9 = 0.891$이다.

최종답 0.891

A11 분포함수에서 확률 읽기 ★★

정리 6.3 · 10분

확률변수 X의 분포함수가 다음과 같다.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x+1}{4} & 0\le x<1\\ \frac{3}{4} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

(a) $P(X=0)$, (b) $P(X=1)$, (c) $P(\frac{1}{2}<X\le 2)$, (d) $P(X<2)$를 구하라. X는 이산인가, 연속인가?

풀이 정리 6.3(d)를 쓴다. (a) $F(0)-F(0-)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$. (b) $F(1)-F(1-)=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$. (c) $F(2)-F(\frac{1}{2})=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$. (d) $P(X<2)=F(2-)=\frac{3}{4}$. 점 $0,1,2$에 각각 확률 $\frac{1}{4}$이 있고 나머지 $\frac{1}{4}$은 $(0,1)$ 위에 밀도 $\frac{1}{4}$로 퍼져 있다. 점에 확률이 있으므로 연속이 아니고, 점들의 확률의 합이 $\frac{3}{4}<1$이므로 이산도 아니다. 1회 6.3절의 혼합형이다.

최종답 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{5}{8}$ (d) $\frac{3}{4}$

A12 밀도의 상수 ★

정의 6.6, 정리 6.7 · 10분

$f(x)=cx(1-x)$ $(0<x<1)$, 그 밖에서 $f(x)=0$이 밀도가 되게 하자. (a) c를 정하라. (b) $0\le x\le 1$에서 분포함수 $F(x)$를 구하라. (c) $P(\frac{1}{4}<X<\frac{3}{4})$를 구하라.

풀이 (a) $\int_0^1 x(1-x)\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이므로 $c=6$이다. (b) $F(x)=\int_0^x 6t(1-t)\,dt=3x^2-2x^3$. (c) $F(\frac{3}{4})-F(\frac{1}{4})=(\frac{27}{16}-\frac{27}{32})-(\frac{3}{16}-\frac{1}{32})=\frac{27}{32}-\frac{5}{32}=\frac{22}{32}=\frac{11}{16}$. 밀도가 $\frac{1}{2}$에 대해 대칭이므로 $F(\frac{1}{4})=1-F(\frac{3}{4})=\frac{5}{32}$이다.

최종답 (a) $c=6$ (b) $3x^2-2x^3$ (c) $\frac{11}{16}$

A13 처음 앞면이 짝수 번째 ★★

정리 4.9, 5.11 · [T5] · 10분

앞면이 나올 확률이 p $(0<p<1)$인 동전을 앞면이 나올 때까지 독립적으로 던진다. (a) 처음 앞면이 짝수 번째에 나올 확률을 p의 식으로 구하라. (b) $p=\frac{1}{2}$이면 얼마인가?

풀이 $q=1-p$라 하자. E_k는 처음 $k-1$번이 뒷면이고 k번째가 앞면인 사건이므로 독립(정리 5.11)으로 $P(E_k)=q^{k-1}p$이다. E_k들은 쌍마다 서로소이므로 가산가법성으로

$$P\Big(\bigcup_{j\ge 1}E_{2j}\Big)=\sum_{j=1}^{\infty}q^{2j-1}p=\frac{qp}{1-q^2}=\frac{qp}{(1-q)(1+q)}=\frac{q}{1+q}=\frac{1-p}{2-p}.$$

기하급수 $\sum_{j\ge 1} r^j = \frac{r}{1-r}$ ($|r|<1$)를 $r = q^2$에 썼다. (b) $p = \frac{1}{2}$이면 $\frac{1}{3}$이다. 짝수 번째와 홀수 번째의 확률의 비는 언제나 $q : 1$이다.

최종답 (a) $\frac{1-p}{2-p}$ (b) $\frac{1}{3}$

A14 같은 달에 태어난 두 사람 ★

정리 1.2, 4.3(c) · 6분

네 사람의 생일 달이 12달 가운데 서로 독립이고 균등하다. 같은 달에 태어난 두 사람이 있을 확률을 구하라.

풀이 네 사람의 달이 모두 다른 결과는 $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9 = 11{,}880$가지이고 전체는 $12^4 = 20{,}736$가지다. 여사건으로 $1 - \frac{11880}{20736} = \frac{8856}{20736} = \frac{41}{96} \approx 0.427$이다. 네 명만 모여도 절반에 가깝다.

최종답 $\frac{41}{96} \approx 0.427$

B

빈칸 증명

노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다. 같은 정리를 세 번 만나며 도움이 줄어든다. ① 단계는 주어지고 근거만 빈칸이다. ② 단계의 이름만 주어진다. ③ 전략만 주어진다. 근거에는 공리 번호, 정의나 정리의 번호, 도구 번호를 쓴다.

B1 연속성, 근거 채우기 ★

① · 정리 4.7(a) · 15분

$A_n \uparrow A$이면 $P(A_n) \uparrow P(A)$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $(n \geq 2)$로 둔다. — 정의

② B_n들은 쌍마다 서로소다. — $m < n$이면 $B_m \subset A_m \subset A_{n-1}$, $B_n \cap A_{n-1} = \varnothing$

③ $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$이고 $A = \bigcup_k B_k$이다. — 원소 추적: $\omega \in A_n$인 가장 작은 n

④ ①–③을 공리에 넣는다.

$$\begin{aligned} P(A) &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) && \text{②③, (P3)} \\ &= \lim_n \textstyle\sum_{k=1}^{n} P(B_k) && \text{급수의 합의 정의 [T5]} \\ &= \lim_n P(A_n) && \text{③, 유한가법성} \end{aligned}$$

⑤ $P(A_n)$은 n에 대해 증가한다. — $A_n \subset A_{n+1}$, 단조성 정리 4.3(d)

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 노트 정리 4.7의 증명과 같다. 세 번째 단계에서 $\omega \in A$이면 $\omega \in A_n$인 가장 작은 n이 있고(자연수의 정렬 원리), 그 n에서 $\omega \in A_n \setminus A_{n-1} = B_n$이다. $n = 1$이면 $\omega \in B_1 = A_1$이다.

B2 포함배제, 근거와 부호 채우기 ★★

① · 정리 4.5 · 20분

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$ 의 귀납법 증명이다. 근거와 부호를 채워라.

① $n = 1$이면 자명하고 $n = 2$이면 두 사건의 공식이다. 정리 4.3(f)

② n에서 성립한다고 하고 $B = A_1 \cup \cdots \cup A_n$으로 두면 $P(B \cup A_{n+1}) = P(B) + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1})$이다. 정리 4.3(f)

③ $B \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i A_{n+1})$이다. 분배법칙 [T1]

④ $P(B \cap A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cdots A_{i_k} A_{n+1})$이다. 귀납 가정을 n개의 사건 $A_i A_{n+1}$에

⑤ j개짜리 교집합이 나오는 부호를 센다.

- A_{n+1}을 포함하지 않는 교집합: $P(B)$의 전개에서 부호 $(-1)^{j+1}$
- A_{n+1} 하나뿐: $+P(A_{n+1})$, 부호 $(-1)^{1+1} = +1$
- A_{n+1}과 다른 $k = j - 1$개: $-P(B \cap A_{n+1})$에서 부호 $-(-1)^{k+1} = (-1)^{j+1}$

⑥ 모든 j개짜리 교집합이 부호 $(-1)^{j+1}$로 한 번씩 나오므로 $n+1$에서 성립한다. 귀납법 [T3]

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 답이다. 넷째 단계에서 귀납 가정을 쓸 수 있는 것은 셋째 단계가 $B \cap A_{n+1}$을 n개 사건의 합집합으로 바꿨기 때문이다. 그 n개 사건의 k개짜리 교집합은 $A_{i_1} \cdots A_{i_k} A_{n+1}$로, 원래 사건들의 $k+1$개짜리 교집합이다.

B3 분포함수의 성질, 근거 채우기 ★★

① · 정리 6.3(b)(c)(d) · 15분

분포함수 $F(x) = P(X \le x)$에 대한 증명이다. 근거를 채워라.

① $\{X \le -n\}$은 감소하고 $\bigcap_n \{X \le -n\} = \varnothing$이다. $X(\omega)$는 실수, 아르키메데스 성질

② $F(-n) \to 0$이다. 연속성, 정리 4.7(b)

③ $\{X \le x + \frac{1}{n}\} \downarrow \{X \le x\}$이다. 모든 n에서 $X(\omega) \le x + \frac{1}{n}$이면 $X(\omega) \le x$

④ $F(x + \frac{1}{n}) \to F(x)$이고, F가 비감소이므로 $\lim_{y \downarrow x} F(y) = F(x)$이다. 정리 4.7(b), 단조 함수의 한쪽 극한 [T5]

⑤ $\{X \le x - \frac{1}{n}\} \uparrow \{X < x\}$이므로 $F(x-) = P(X < x)$이다. [T1], 정리 4.7(a)

⑥ $P(X = x) = F(x) - F(x-)$이다. $\{X = x\} = \{X \le x\} \setminus \{X < x\}$, 정리 4.3(d)

풀이 빈칸의 빨간 글씨가 근거다. 넷째 단계에서 수열 하나$(x + \frac{1}{n})$를 따라 구한 극한이 $y \downarrow x$의 극한과 같은 것은 F가 비감소이기 때문이다. $x < y < x + \frac{1}{n}$이면 $F(x) \le F(y) \le F(x + \frac{1}{n})$이므로 조임 정리를 쓴다.

B4 연속성, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 4.7 · 25분

정리 4.7의 (a)와 (b)를 증명하라. 단계의 이름만 주어진다. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① **서로소인 조각 B_n을 정의한다**

② **조각들이 쌍마다 서로소임을 보인다**

③ **A_n과 A를 조각으로 쓴다**

④ **공리와 급수의 정의로 $P(A)=\lim_n P(A_n)$을 얻는다**

⑤ **(b) 감소하는 열을 여사건으로 증가하는 열로 바꾼다**

⑥ **(a)를 쓰고 여사건 공식으로 되돌린다**

풀이

① $B_1=A_1$, $B_n=A_n\setminus A_{n-1}$. — 정의

② $m<n$이면 $B_m\subset A_m\subset A_{n-1}$이고 $B_n\cap A_{n-1}=\varnothing$이므로 $B_m\cap B_n=\varnothing$. — 열이 증가 [T1]

③ $A_n=\bigcup_{k\le n}B_k$, $A=\bigcup_k B_k$. — 원소 추적 [T1]

④ $P(A)=\sum_k P(B_k)=\lim_n\sum_{k\le n}P(B_k)=\lim_n P(A_n)$. — (P3), [T5], 유한가법성

⑤ $A_n\downarrow A$이면 $A_n^c\uparrow A^c$. — De Morgan, 보조정리 0.1

⑥ $1-P(A_n)=P(A_n^c)\to P(A^c)=1-P(A)$. — (a), 정리 4.3(c)

B5 포함배제, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 4.5 · 30분

정리 4.5를 n에 대한 귀납법으로 증명하라.

① **기저**

② **두 사건의 공식으로 사건 하나를 더한다**

③ **새로 생긴 교집합을 분배법칙으로 쓴다**

④ **귀납 가정을 두 번 쓴다**

⑤ **j개짜리 교집합의 부호를 세 경우로 센다**

⑥ **결론**

풀이 노트 정리 4.5의 증명 1과 같다. 단계별 근거는 B2의 풀이를 본다. 셋째 경우에서 원래 사건들의 j개짜리 교집합 $A_{i_1}\cdots A_{i_{j-1}}A_{n+1}$은 n개 사건 A_iA_{n+1}의 $(j-1)$개짜리 교집합이고, 귀납 가정에서 부호 $(-1)^{(j-1)+1}=(-1)^j$을 받는다. 앞의 마이너스와 곱하면 $(-1)^{j+1}$이다.

B6 연속성, 전략만 ★★

③ · 정리 4.7 · 30분

정리 4.7을 증명하라.

전략 증가하는 열은 서로소인 조각으로 쪼개 급수의 부분합으로 만든다. 감소하는 열은 여사건으로 바꾼다.

풀이 B4의 풀이와 같다. 이 증명이 쓰는 것은 (P3)과 그 결과(유한가법성, 단조성, 여사건 공식)뿐이다. 유한가법성만 있는 "확률"에서는 이 정리가 성립하지 않는다(노트 7.1절의 자연 밀도). 거꾸로 유한가법성에 연속성을 더하면 (P3)이 나온다(노트 연습 4.11).

B7 분포함수의 성질, 전략만 ★★

③ · 정리 6.3 · 35분

정리 6.3의 (a)–(d)를 모두 증명하라.

전략 F의 극한을 사건열의 극한으로 바꾸고 연속성(정리 4.7)을 쓴다. F가 비감소이므로 한쪽 극한은 단조로운 수열 하나를 따라 구하면 된다.

풀이 노트 정리 6.3의 단계형 증명과 같다. 핵심 단계와 근거는 B3의 풀이에 있고, (a)는 $\{X \le x\} \subset \{X \le y\}$와 단조성이다. 오른쪽 연속인 것은 $\bigcap_n \{X \le x + \frac{1}{n}\} = \{X \le x\}$이기 때문이고, 왼쪽에서는 $\bigcup_n \{X \le x - \frac{1}{n}\} = \{X < x\}$가 $\{X \le x\}$와 $\{X = x\}$만큼 다르기 때문에 연속이 아닐 수 있다. 분포함수를 $P(X < x)$로 정의했다면 왼쪽 연속이 되었을 것이다.

C

증명 문제

노트의 정리를 변형하고, 일반화하고, 반례로 경계를 확인한다. 증명은 노트의 단계형 모양으로 쓴다. 한 줄에 한 단계, 줄마다 근거.

C1 대칭차 ★

[T1] · 정리 4.3 · 15분

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$를 A와 B의 **대칭차**라 한다. 다음을 보여라.

(a) $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$

(b) $|P(A) - P(B)| \le P(A \triangle B)$

(c) $P(A \triangle C) \le P(A \triangle B) + P(B \triangle C)$

풀이 (a) $A \setminus B$와 $B \setminus A$는 서로소다. $A \setminus B = A \setminus AB$이고 $AB \subset A$이므로 정리 4.3(d)로 $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$이고, 같은 방법으로 $P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$이다. 유한가법성으로 더한다.

(b) $P(A) - P(B) = \big(P(A) - P(AB)\big) - \big(P(B) - P(AB)\big) = P(A \setminus B) - P(B \setminus A) \le P(A \setminus B) \le P(A \triangle B)$이다. A와 B를 바꾸면 $P(B) - P(A) \le P(A \triangle B)$이다.

(c) $\omega \in A \triangle C$라 하자. $\omega \in A \setminus C$이면, $\omega \in B$일 때 $\omega \in B \setminus C \subset B \triangle C$이고 $\omega \notin B$일 때 $\omega \in A \setminus B \subset A \triangle B$이다. $\omega \in C \setminus A$이면 같은 방법으로 $\omega \in (B \triangle A) \cup (C \triangle B)$이다. 따라서 $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$이고, 단조성과 Boole 부등식(정리 4.3(d)(g))으로 결론이 나온다. 이 부등식으로 $d(A, B) = P(A \triangle B)$는 사건들 사이의 거리처럼 쓰인다.

C2 모두 함께 일어날 확률의 하한 ★★

[T1] · 정리 4.3(g) · 15분

(a) 사건 $A_1, \dots, A_n$에 대해 $P\big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\big) \ge \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$을 보여라.

(b) $\sum_i P(A_i) > n - 1$이면 $A_1, \dots, A_n$이 모두 함께 일어날 확률이 양수임을 보여라.

(c) 확률이 각각 0.99인 사건 50개가 모두 일어날 확률의 (a)의 하한을 구하라. 사건이 몇 개이면 이 하한이 0이 되는가?

풀이 (a) De Morgan으로 $(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c$이다. 여사건 공식과 Boole 부등식으로

$$P\Big(\bigcap_i A_i\Big) = 1 - P\Big(\bigcup_i A_i^c\Big) \ge 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \big(1 - P(A_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

(b) (a)의 오른쪽이 양수다. (c) $50\cdot 0.99-49=0.5$이다. 사건이 n개이면 하한은 $0.99n-(n-1)=1-0.01n$이므로 $n=100$에서 0이 된다. 이 하한은 사건들의 관계를 전혀 가정하지 않는다. 사건들이 독립이면 정확한 값은 $0.99^{50}\approx 0.605$로 하한보다 크다.

최종답 (c) $\frac{1}{2}$

C3 사건열의 상극한과 하극한 ★★

[T5] · 정리 4.7 · 20분

사건열 $A_1, A_2, \ldots$에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$\limsup_{n} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\ge n}A_k, \qquad \liminf_{n} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\ge n}A_k.$$

(a) $\omega\in\limsup_n A_n$은 ω가 무한히 많은 A_n에 속한다는 것과 같고, $\omega\in\liminf_n A_n$은 유한개를 빼고 모든 A_n에 속한다는 것과 같음을 보여라.

(b) $\liminf_n A_n\subset\limsup_n A_n$이고 $(\limsup_n A_n)^c=\liminf_n A_n^c$임을 보여라.

(c) 다음을 보여라.

$$P\big(\liminf_n A_n\big)\le\liminf_n P(A_n)\le\limsup_n P(A_n)\le P\big(\limsup_n A_n\big)$$

풀이 (a) $\omega\in\bigcap_n\bigcup_{k\ge n}A_k$는 "모든 n에 대해 $\omega\in A_k$인 $k\ge n$이 있다"는 뜻이다. 이것은 ω가 속하는 A_k의 첨자가 위로 유계가 아니라는 것, 곧 무한히 많다는 것과 같다. $\omega\in\bigcup_n\bigcap_{k\ge n}A_k$는 "어떤 n이 있어 $k\ge n$인 모든 A_k에 ω가 속한다"는 뜻이고, 이것은 ω가 속하지 않는 A_k가 유한개라는 것과 같다.

(b) 유한개를 빼고 모두에 속하면 무한히 많은 것에 속한다. De Morgan을 두 번 쓰면 $(\bigcap_n\bigcup_{k\ge n}A_k)^c=\bigcup_n\bigcap_{k\ge n}A_k^c$이다.

(c) $C_n\uparrow\liminf_n A_n$이므로 연속성(정리 4.7(a))으로 $P(C_n)\to P(\liminf A_n)$이다. $C_n\subset A_k$ $(k\ge n)$이므로 $P(C_n)\le\inf_{k\ge n}P(A_k)$이고, $n\to\infty$에서 $P(\liminf A_n)\le\liminf_n P(A_n)$이다. 같은 방법으로 $D_n\downarrow\limsup A_n$, $P(D_n)\ge\sup_{k\ge n}P(A_k)$에서 정리 4.7(b)로 $P(\limsup A_n)\ge\limsup_n P(A_n)$이다. 가운데 부등식은 수열의 하극한이 상극한보다 크지 않다는 것이다 [T5].

C4 Borel–Cantelli의 첫째 보조정리 ★★

[T5] · C3, 정리 4.3(g) · 15분

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$이면 $P(\limsup_n A_n)=0$, 곧 확률 1로 유한개의 A_n만 일어남을 보여라.

(b) $P(A_n)=1/n^2$이면 무한히 많은 A_n이 일어날 확률은 얼마인가?

(c) 거꾸로는 성립하지 않는다. U가 $\mathrm{U}(0,1)$이고 $A_n=\{U<1/n\}$이면 $\sum_n P(A_n)=\infty$인데 $P(\limsup_n A_n)=0$임을 보여라.

풀이 (a) 정의로 모든 n에서 $\limsup_k A_k \subset \bigcup_{k\ge n} A_k$이다. 단조성과 Boole 부등식으로 $P(\limsup_k A_k) \le \sum_{k\ge n} P(A_k)$이다. 급수가 수렴하면 꼬리는 $n\to\infty$에서 0으로 가므로 $P(\limsup_k A_k)=0$이다. C3(a)로 이것은 "무한히 많은 A_n이 일어날 확률이 0"이라는 뜻이다.

(b) $\sum 1/n^2 < \infty$이므로 (a)로 0이다.

(c) $P(A_n)=1/n$이고 $\sum 1/n=\infty$이다(조화급수 [T5]). A_n은 감소하므로 $\bigcup_{k\ge n} A_k = A_n$이고 $\limsup A_n = \bigcap_n A_n = \{U \le 0\}$이다. $U\in(0,1)$이므로 이 사건은 공집합이고 확률은 0이다. 둘째 보조정리, 곧 "$\sum P(A_n)=\infty$이고 A_n들이 상호 독립이면 $P(\limsup A_n)=1$"에는 독립이 필요하다는 것을 이 예가 보여 준다.

C5 조건부 독립은 독립이 아니다 ★★

[T2] · 정리 5.4 · 20분

앞면이 나올 확률이 0.9인 동전과 0.1인 동전이 있다. 같은 확률로 하나를 골라, 고른 동전을 독립적으로 두 번 던진다. C를 첫째 동전을 고른 사건, H_i를 i번째가 앞면인 사건이라 하자.

(a) 이 실험의 확률공간 (Ω,P)를 적고, $P(H_1H_2\mid C)=P(H_1\mid C)P(H_2\mid C)$이며 C^c에서도 그러함을 확인하라.

(b) $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(H_1H_2)$를 구해 H_1과 H_2가 독립이 아님을 보여라.

(c) $P(H_2\mid H_1)$을 구하라. 첫 결과가 둘째 결과에 대해 무엇을 알려 주는지 설명하라.

풀이 (a) $p_1=0.9$, $p_2=0.1$로 두면 $\Omega=\{1,2\}\times\{\text{앞},\text{뒤}\}^2$ 위에 $P(c,h_1,h_2)=\tfrac12 p_c^{a}(1-p_c)^{2-a}$ (a는 앞면의 수)이다. 합이 $\tfrac12\big[(p_1+q_1)^2+(p_2+q_2)^2\big]=1$이므로 정리 4.9로 확률이다. $P(H_1H_2\mid C)=\frac{\frac12\cdot 0.81}{\frac12}=0.81=0.9\cdot0.9=P(H_1\mid C)P(H_2\mid C)$이고, C^c에서도 $0.01=0.1\cdot0.1$이다.

(b) 전확률 공식으로 $P(H_1)=\tfrac12(0.9+0.1)=\tfrac12$, 같은 방법으로 $P(H_2)=\tfrac12$이고, $P(H_1H_2)=\tfrac12(0.81+0.01)=0.41\neq 0.25=P(H_1)P(H_2)$이다.

(c) $P(H_2\mid H_1)=0.41/0.5=0.82$이다. 첫 번째가 앞면이면 앞면이 잘 나오는 동전을 골랐을 사후확률이 $\frac{0.45}{0.5}=0.9$로 올라가고, 그 정보가 둘째 던지기의 예측에 들어간다. 동전이 정해지면 두 결과는 서로에 대해 알려 주는 것이 없지만, 동전을 모르면 두 결과는 같은 미지의 동전에 대한 정보를 공유한다.

최종답 (b) $P(H_1H_2)=0.41$ (c) 0.82

C6 Bonferroni 부등식, 셋째 항까지 ★★★

[T3] · 정리 1.5, 4.9 · 25분

Ω가 유한하거나 셀 수 있고 P가 정리 4.9의 이산 확률 $P(A)=\sum_{\omega\in A}p(\omega)$이다. S_k는 노트 4.4절의 기호다.

(a) 모든 $m\ge 1$, $j\ge 0$에서 $\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{m}{k}=(-1)^j\binom{m-1}{j}$임을 j에 대한 귀납법으로 보여라.

(b) $A_1,\dots,A_n$ 가운데 정확히 $m\ge 1$개에 속하는 점 ω는 $S_1-S_2+S_3$에 $\left[\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}\right]p(\omega)$만큼 기여함을 보여라. 어느 A_i에도 속하지 않는 점은?

(c) (a)와 (b)로 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le S_1-S_2+S_3$을 보여라.

풀이 (a) $j=0$이면 양변이 1이다. j에서 성립하면

$$\sum_{k=0}^{j+1}(-1)^k\binom{m}{k}=(-1)^j\binom{m-1}{j}+(-1)^{j+1}\left[\binom{m-1}{j}+\binom{m-1}{j+1}\right]=(-1)^{j+1}\binom{m-1}{j+1}.$$

(b) $S_k=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{\omega\in A_{i_1}\cdots A_{i_k}}p(\omega)$에서 합의 순서를 바꾸면(음이 아닌 항의 재배열) $S_k=\sum_{\omega}N_k(\omega)p(\omega)$이다. $N_k(\omega)$는 ω를 포함하는 k개짜리 교집합의 수이고, ω가 정확히 m개의 사건에 속하면 $N_k(\omega)=\binom{m}{k}$이다. 어느 사건에도 속하지 않으면 $N_k=0$이다.

(c) ω가 정확히 $m\ge 1$개에 속하면 (a)를 $j=3$에 써서

$$\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}=1-\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{m}{k}=1+\binom{m-1}{3}\ge 1$$

이다. 따라서 $S_1-S_2+S_3=\sum_{\omega}[\cdots]p(\omega)\ge\sum_{\omega\in\bigcup A_i}p(\omega)=P(\bigcup A_i)$이다. 같은 논리로 홀수 개의 항에서 자르면 위로, 짝수 개에서 자르면 아래로 어긋난다(노트 연습 4.5가 $j=2$의 경우다). 일반 확률공간에서의 증명은 같은 계산을 지시함수의 기댓값으로 한다.

C7 σ-대수의 교집합과 합집합 ★★

[T1], [T2] · 정의 4.1 · 20분

(a) σ-대수 $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$의 교집합 $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$가 σ-대수임을 보여라. 임의 개의 σ-대수의 교집합도 그러한가?

(b) $\Omega=\{1,2,3\}$, $\mathcal{F}_1=\{\varnothing,\{1\},\{2,3\},\Omega\}$, $\mathcal{F}_2=\{\varnothing,\{2\},\{1,3\},\Omega\}$에서 $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$가 σ-대수가 아님을 보여라.

(c) Ω의 부분집합의 모임 $\mathcal{A}$를 포함하는 σ-대수 가운데 가장 작은 것 $\sigma(\mathcal{A})$가 있음을 (a)로 보여라. $\Omega=\{1,2,3\}$, $\mathcal{A}=\{\{1\}\}$이면 $\sigma(\mathcal{A})$는 무엇인가?

풀이 (a) 정의 4.1의 세 조건을 확인한다. Ω는 두 모임에 모두 있다. $A\in\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$이면 A^c가 각 모임에 있으므로 교집합에 있다. 가산 합집합도 같다. 이 논리는 모임이 몇 개이든(셀 수 없이 많아도) 그대로다.

(b) $\{1\},\{2\}\in\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$이지만 $\{1\}\cup\{2\}=\{1,2\}$는 어느 쪽에도 없다. 합집합에 닫혀 있지 않다.

(c) $\mathcal{A}$를 포함하는 σ-대수들의 모임은 공집합이 아니다(Ω의 모든 부분집합의 모임이 들어 있다). 그 모두의 교집합을 $\sigma(\mathcal{A})$로 두면 (a)로 σ-대수이고, $\mathcal{A}$를 포함하며, $\mathcal{A}$를 포함하는 모든 σ-대수에 포함된다. $\mathcal{A} = \{\{1\}\}$이면 $\{1\}$을 포함하는 σ-대수는 $\{1\}^c = \{2,3\}$, $\varnothing$, Ω를 포함해야 하고, $\{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$는 이미 σ-대수이므로 그것이 $\sigma(\mathcal{A})$다.

C8 유리수에서 같은 두 분포함수 ★★

[T5] · 정리 6.3(c) · 15분

두 분포함수 F와 G가 모든 유리수 q에서 $F(q) = G(q)$이면 모든 실수 x에서 $F(x) = G(x)$임을 보여라. 유리수 대신 어떤 성질을 갖는 집합이면 같은 결론이 나오는가?

풀이 x가 실수이면 유리수의 조밀성으로 $x < q_n < x + \frac{1}{n}$인 유리수 q_n이 있고 $q_n \downarrow x$이다. 오른쪽 연속성으로 $F(x) = \lim_n F(q_n) = \lim_n G(q_n) = G(x)$이다. 쓴 것은 "모든 x에 대해 x보다 크면서 x로 다가가는 점열이 그 집합 안에 있다"는 성질뿐이다. 예를 들어 $\{k/2^m\}$ 꼴의 수의 집합이나, 셀 수 있는 점들을 뺀 실수 전체도 된다. 연습 6.2와 함께 쓰면, F의 연속점에서만 같아도 $F = G$이다.

C9 조건부확률 안의 전확률 공식 ★

정리 5.2, 5.4 · 10분

$P(BC) > 0$, $P(BC^c) > 0$이면 다음이 성립함을 두 가지로 보여라.

$$P(A \mid B) = P(A \mid BC)\,P(C \mid B) + P(A \mid BC^c)\,P(C^c \mid B)$$

(a) 조건부확률의 정의를 직접 써서. (b) $Q = P(\cdot \mid B)$가 확률이라는 정리 5.2와 전확률 공식을 Q에 써서. 이때 $Q(A \mid C) = P(A \mid BC)$임을 확인하라.

풀이 (a) $P(A \mid BC)P(C \mid B) = \frac{P(ABC)}{P(BC)} \cdot \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{P(ABC)}{P(B)}$이고, 둘째 항은 $\frac{P(ABC^c)}{P(B)}$이다. $AB = ABC \cup ABC^c$는 서로소인 합집합이므로 합은 $P(AB)/P(B) = P(A \mid B)$이다.
(b) $Q(C) = P(C \mid B) > 0$이므로 Q에 대한 조건부확률을 쓸 수 있고 $Q(A \mid C) = \frac{Q(AC)}{Q(C)} = \frac{P(ABC)/P(B)}{P(BC)/P(B)} = P(A \mid BC)$이다. $\{C, C^c\}$는 분할이므로 Q에 대한 전확률 공식이 곧 주어진 식이다. 정리 5.2는 "B가 주어진 세계"에서도 확률의 모든 규칙을 그대로 쓸 수 있다는 뜻이다.

D

퀄형

여러 절의 도구를 잇는 종합 문제다. 머리의 제한 시간을 재고, 노트를 덮고 푼다. 모형을 확률공간으로 적는 것부터 답안의 일부다.

D1 Banach의 성냥갑 ★★★

정리 1.4, 5.11 · 제한 35분

한 수학자가 성냥이 N개씩 든 갑 두 개를 양쪽 주머니에 하나씩 넣고 다닌다. 성냥이 필요할 때마다 같은 확률로, 앞의 선택들과 독립으로 한쪽 주머니를 고른다. 고른 갑이 비어 있는 것을 처음 발견하는 순간에 다른 갑에 남은 성냥의 수를 K라 하자.

(a) $k = 0, 1, \dots, N$에서 $P(K = k) = \binom{2N-k}{N} 2^{-(2N-k)}$임을 보여라.

(b) (a)에서 항등식 $\sum_{k=0}^{N} \binom{2N-k}{N} 2^{k} = 2^{2N}$을 얻어라. 이때 무엇을 확인해야 하는가?

(c) $N = 5$이면 $P(K = 0)$은 얼마인가?

풀이 (a) 선택들을 공정한 동전의 독립 시행으로 모형화한다(노트 예제 5.12의 독립 시행 모형). L_k를 "왼쪽 갑이 빈 것을 처음 발견하고, 그때 오른쪽에 k개가 남은" 사건이라 하자. 왼쪽이 빈 것을 발견하는 것은 왼쪽을 $N+1$번째로 고를 때다. 그때까지 오른쪽은 $N-k$번 골랐으므로 오른쪽은 아직 비지 않았고, 따라서 그 전에 오른쪽이 빈 것을 발견했을 수도 없다. 그러므로 L_k는 "처음 $2N-k$번 가운데 왼쪽이 정확히 N번이고 $(2N-k+1)$번째가 왼쪽"인 사건과 같다. 그런 선택의 순서는 $\binom{2N-k}{N}$가지이고 각각의 확률은 $2^{-(2N-k+1)}$이다. 오른쪽에 대한 같은 사건 R_k와 L_k는 서로소이고 확률이 같으므로

$$P(K = k) = 2\binom{2N-k}{N} 2^{-(2N-k+1)} = \binom{2N-k}{N} 2^{-(2N-k)}.$$

(b) 최대 $2N+1$번 안에 반드시 어느 한 갑이 빈 것을 발견하므로 $\{K = k\}$ $(k = 0, \dots, N)$는 표본공간의 분할이다. 따라서 $\sum_k P(K = k) = 1$이고, 양변에 2^{2N}을 곱하면 항등식이다.

(c) $\binom{10}{5}/2^{10} = 252/1024 = \frac{63}{256} \approx 0.246$이다. $N = 5$이면 $K = 0$과 $K = 1$의 확률이 같고 ($\binom{9}{5}/2^{9} = 126/512$), 그 뒤로 줄어든다.

최종답 (a) $\binom{2N-k}{N} 2^{-(2N-k)}$ (c) $\frac{63}{256} \approx 0.246$

D2 도박꾼의 파산 ★★★

[T2], [T5] · 정리 4.7, 5.4, 5.13 · 제한 40분

판마다 확률 p로 1원을 따고 $q = 1-p$로 1원을 잃는다. 판들은 독립이고 $p \neq \frac{1}{2}$이다. 가진 돈이 i원$(0 < i < N)$에서 시작해 N원이 되거나 0원이 되면 멈춘다. h_i를 N원에 먼저 닿을 확률이라 하고 $h_0 = 0$, $h_N = 1$로 둔다.

(a) 게임이 영원히 끝나지 않을 확률이 0임을 보여라.

(b) 첫 판에 대한 전확률 공식으로 $h_i = p\,h_{i+1} + q\,h_{i-1}$ $(0 < i < N)$을 보여라.

(c) 이 재귀와 경계조건을 만족하는 수열은 하나뿐임을 보이고 다음을 확인하라.

$$h_i = \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}$$

(d) $p = 0.4$, $i = 5$, $N = 10$이면 h_5는 얼마인가? 공정한 게임$(p = \frac{1}{2})$이면 $h_i = i/N$이다. 비교하라.

풀이 (a) E_m을 처음 m개의 N판짜리 묶음(판 $1\text{–}N, N+1\text{–}2N, \dots$)에서 게임이 끝나지 않은 사건이라 하자. 게임이 끝나지 않았으면 각 묶음은 "N판 모두 승"이 아니었다. 묶음들은 서로 다른 판으로 이루어지므로 독립이고 $P(E_m) \le (1-p^N)^m$이다. E_m은 감소하고 $\bigcap_m E_m$이 "영원히 끝나지 않는다"이므로 연속성으로 확률은 $\lim_m (1-p^N)^m = 0$이다.

(b) W를 N원에 먼저 닿는 사건, H를 첫 판을 따는 사건이라 하자. 전확률 공식으로 $P(W) = P(W \mid H)p + P(W \mid H^c)q$이다. 첫 판을 따면 남은 게임은 $i+1$원에서 새로 시작하는 게임과 같으므로(첫 판 이후의 판들은 첫 판과 독립이다. 노트 정리 5.13의 증명과 같은 논리) $P(W \mid H) = h_{i+1}$이고, 같은 방법으로 $P(W \mid H^c) = h_{i-1}$이다.

(c) 유일성: 두 해의 차 d_i는 $d_i = pd_{i+1} + qd_{i-1}$, $d_0 = d_N = 0$을 만족한다. $M = \max_i d_i > 0$이라 하고, $d_i = M$인 가장 작은 i를 잡자. $0 < i < N$이고 $d_{i-1} < M$이므로 $d_i = pd_{i+1} + qd_{i-1} < pM + qM = M$이 되어 모순이다 [T2]. 같은 방법으로 $\min_i d_i < 0$일 수 없으므로 $d \equiv 0$이다. 확인: $r = q/p$로 두면 $p\,r^{i+1} + q\,r^{i-1} = r^{i-1}(pr^2 + q) = r^{i-1}(q^2/p + q) = r^{i-1} \cdot \frac{q}{p} = r^i$이므로 r^i은 재귀의 해이고, 상수도 해다. 그 일차결합 $\frac{1-r^i}{1-r^N}$은 재귀와 두 경계조건을 만족한다($p \neq \frac{1}{2}$이면 $r \neq 1$).

(d) $r = 1.5$이므로 $h_5 = \frac{1-1.5^5}{1-1.5^{10}} = \frac{32}{275} \approx 0.116$이다. 공정한 게임이면 $\frac{5}{10} = 0.5$다. 판마다 불리함은 0.4 대 0.6으로 작지만 N에 닿을 확률은 네 배 넘게 줄어든다.

최종답 (c) $\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}$ (d) $\frac{32}{275} \approx 0.116$

D3 Pólya의 항아리 ★★★

[T3] · 정리 5.3, 5.4, 5.5 · 제한 30분

빨간 공 r개와 파란 공 b개가 든 항아리에서 공을 하나 꺼내 색을 보고, 그 공을 같은 색의 공 c개와 함께 다시 넣는다. 이것을 되풀이한다. R_n을 n번째에 꺼낸 공이 빨강인 사건이라 하자.

(a) $P(R_2) = \frac{r}{r+b}$임을 보여라.

(b) $P(R_1 \mid R_2)$를 구하라. $P(R_1)$보다 큰가?

(c) 모든 $n \ge 1$에서 $P(R_n) = \frac{r}{r+b}$임을 보여라.

(d) $r = b = c = 1$이면 $P(R_1 R_2 R_3)$은 얼마인가?

풀이 (a) 첫 꺼냄으로 나누면(전확률 공식)

$$P(R_2) = \frac{r}{r+b}\cdot\frac{r+c}{r+b+c} + \frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b+c} = \frac{r(r+c+b)}{(r+b)(r+b+c)} = \frac{r}{r+b}.$$

(b) 곱셈법칙과 (a)로 $P(R_1 \mid R_2) = \frac{P(R_1R_2)}{P(R_2)} = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}\cdot\frac{r+b}{r} = \frac{r+c}{r+b+c}$이다. $c > 0$이면 $\frac{r+c}{r+b+c} > \frac{r}{r+b}$이다(교차곱하면 $bc > 0$). 둘째가 빨강이었다는 것은 첫째도 빨강이었을 가능성을 높인다.

(c) $S(n)$: "모든 $r, b > 0$에 대해 $P_{r,b}(R_n) = \frac{r}{r+b}$". $S(1)$은 정의다. $S(n)$을 가정하자. 첫 꺼냄이 빨강이면 그 뒤의 과정은 $(r+c, b)$에서 시작한 항아리이고, 거기서의 n번째 꺼냄이 원래의 $(n+1)$번째다. 전확률 공식과 귀납 가정으로

$$P_{r,b}(R_{n+1}) = \frac{r}{r+b}\cdot\frac{r+c}{r+b+c} + \frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b+c} = \frac{r}{r+b}$$

이고, 계산은 (a)와 같다. 귀납 가정을 다른 (r, b)에 쓰기 때문에 명제에 "모든 r, b"가 들어가야 한다.

(d) 곱셈법칙으로 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$이다. 같은 항아리에서 빨강 둘과 파랑 하나가 나올 확률은 순서에 상관없이 $\frac{1}{12}$이다. 이 대칭(교환가능성)이 (c)의 결과의 이유다.

최종답 (a) $\frac{r}{r+b}$ (b) $\frac{r+c}{r+b+c}$ (d) $\frac{1}{4}$

D4 크랩스 ★★★

[T5] · 정리 4.7, 4.9, 5.4 · 제한 35분

주사위 두 개의 합으로 하는 게임이다. 첫 굴림이 7이나 11이면 이기고, 2, 3, 12이면 진다. 그 밖의 합 $s \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$이 나오면 s가 "포인트"가 되고, 그 뒤로 굴려 s가 7보다 먼저 나오면 이기고 7이 먼저 나오면 진다. 굴림들은 독립이다. 한 번 굴려 합이 s일 확률을 π_s라 하자.

(a) 포인트가 s일 때 s가 7보다 먼저 나올 확률이 $\frac{\pi_s}{\pi_s+\pi_7}$임을 보여라. s도 7도 영원히 나오지 않을 확률이 0임도 보여라.

(b) 포인트가 4일 때 이 확률은 얼마인가?

(c) 이길 확률이 $\frac{244}{495}$임을 보여라.

풀이 (a) $t = 1 - \pi_s - \pi_7$로 두면 독립으로 $P(E_k) = t^{k-1}\pi_s$이고, E_k들은 쌍마다 서로소이므로 가산가법성으로 $P(\bigcup_k E_k) = \pi_s \sum_{k\ge 1} t^{k-1} = \frac{\pi_s}{1-t} = \frac{\pi_s}{\pi_s+\pi_7}$이다. 처음 m번에 s도 7도 나오지 않을 확률은 t^m이고, 이 사건들은 감소하므로 연속성으로 영원히 나오지 않을 확률은 $\lim t^m = 0$이다.
(b) $\pi_4 = \frac{3}{36}$, $\pi_7 = \frac{6}{36}$이므로 $\frac{3}{3+6} = \frac{1}{3}$이다.
(c) 첫 굴림에 대한 전확률 공식으로

$$P(\text{승}) = \pi_7 + \pi_{11} + \sum_{s\in\{4,5,6,8,9,10\}} \pi_s \frac{\pi_s}{\pi_s+\pi_7} = \frac{6+2}{36} + 2\cdot\frac{1}{36}\left(\frac{9}{9} + \frac{16}{10} + \frac{25}{11}\right) = \frac{244}{495} \approx 0.4929.$$

s와 $14-s$의 항이 같으므로 묶었다($\pi_s^2/(\pi_s+\pi_7)$에 36을 곱하면 $\frac{3^2}{9}$, $\frac{4^2}{10}$, $\frac{5^2}{11}$). 이 게임은 걸이에게 0.507 대 0.493으로 불리하다.

최종답 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{244}{495} \approx 0.4929$