수리통계학 × 통계학의 역사

1회 워크북

확률이란 무엇인가 손으로 푸는 34문항

강의노트 1회를 읽은 뒤 손으로 푼다. 노트의 증명을 눈으로 따라간 것과 빈 종이에 다시 쓰는 것은 다른 일이다. 이 워크북은 그 차이를 메우려고 만들었다. 문제 아래의 줄 친 공간에 직접 쓴다.

부	하는 일	문항	예상 시간
A 계산 드릴	정의와 공식을 손으로 돌린다. 답이 수나 식으로 나온다	14	2시간
B 빈칸 증명	노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다	7	2시간 50분
C 증명 문제	변형, 일반화, 반례 만들기	9	2시간 35분
D 퀄형	여러 절을 잇는 종합 문제. 제한 시간 안에	4	2시간 20분
	합계	34	약 10시간

노트 `01_probability_notes.pdf` — 문항의 "정리 4.7" 같은 번호는 노트의 번호다

도구 `00_toolkit_notes.pdf` — [T1] 원소 추적, [T2] 귀류, [T3] 귀납, [T5] 극한과 급수

검산 노트북 `01_probability.ipynb`의 "워크북 검산" 절: `check("A3", "1/2")`

이 워크북을 쓰는 법

1. **노트를 덮고 푼다.** 문제의 머리 오른쪽에 쓸 도구, 관련 정리 번호, 예상 시간이 있다. 예상 시간의 두 배가 지나도 진척이 없으면 그때 노트를 편다.
2. **막히면 3단으로 본다.** 뒤의 **힌트와 최종답**에서 힌트를 먼저 본다. 다 푼 뒤에는 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나거나 증명이 막히면 풀이판을 본다.
3. **B부는 순서대로 푼다.** 같은 정리를 세 번 만난다. 처음에는 근거만 빈칸이고(①), 다음에는 단계의 이름만 있고(②), 마지막에는 전략만 있다(③). 앞 단계의 답을 보면서 다음 단계를 쓰지 않는다.
4. **계산은 검산한다.** 최종답이 수나 식인 문항은 노트북의 `check()`에 넣으면 맞는지만 알려 준다. 정답은 보여 주지 않는다.
5. **증명은 근거를 단다.** 등호와 부등호마다 어느 공리, 정의, 정리를 썼는지 오른쪽에 적는다. 노트의 단계형 증명과 같은 모양이다.

표시 ★ 정의를 바로 쓰는 문제, ★★ 두세 단계를 잇는 문제, ★★★ 퀄에 나오는 길이의 문제. [T1]–[T8]은 증명 도구 상자의 도구 번호다.

예: 빈칸과 풀이 공간

① $A \subset B$이면 $P(A) \le P(B)$이다. 왜? _____

A

계산 드릴

정의와 공식을 손으로 돌린다. 답이 수나 식으로 떨어지므로 다 풀면 뒤의 최종답이나 노트북의 `check()`로 맞춰 본다. 계산기는 마지막 나눗셈에만 쓴다.

A1 MISSISSIPPI의 배열 ★

정리 1.1, 1.4 · 6분

MISSISSIPPI의 11글자를 한 줄로 늘어놓는 서로 다른 배열의 수를 구하라. 같은 글자끼리는 구별하지 않는다.

A2 음이 아닌 정수해의 수 ★

정리 1.4 · 8분

음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4로 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$을 만족하는 해 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 수를 구하라.

A3 세 주사위의 합 ★

따름정리 4.10 · 8분

공정한 주사위 세 개를 던진다. 눈의 합이 10 이하일 확률을 구하라. 216가지를 모두 세지 말고 대칭을 써라.

A4 2, 3, 5로 나누어떨어지지 않는 수 ★

정리 4.5 · 10분

1부터 1000까지의 정수 가운데 2, 3, 5 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는 수는 몇 개인가?

A5 모든 눈이 나올 확률 ★★

정리 4.5 · 12분

공정한 주사위를 n번 던져 1부터 6까지의 눈이 모두 적어도 한 번 나올 확률을 p_n이라 하자.

(a) p_6을 직접 세어 구하라.

(b) 포함배제로 다음을 보이고 p_{10}을 구하라.

$$p_n = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} \left(1 - \frac{k}{6}\right)^n$$

A6 합이 8일 때 ★

정의 5.1 · 6분

공정한 주사위 두 개를 던져 눈의 합이 8이었다. 적어도 한 주사위가 6일 조건부확률을 구하라.

A7 세 공장의 불량품 ★

정리 5.4, 5.5 · 8분

한 부품을 공장 I, II, III이 각각 50%, 30%, 20% 만든다. 불량률은 각각 1%, 2%, 5%다. (a) 무작위로 고른 부품이 불량일 확률을 구하라. (b) 불량품 하나가 공장 III에서 왔을 확률을 구하라.

A8 세 번 모두 빨강 ★★

정리 5.5, 5.11 · 8분

항아리 I에는 빨간 공 3개와 파란 공 2개, 항아리 II에는 빨간 공 1개와 파란 공 4개가 있다. 공정한 동전으로 항아리 하나를 고르고, 그 항아리에서 복원추출로 세 번 뽑았더니 모두 빨강이었다. 항아리 I을 골랐을 사후확률을 구하라. 사후 오즈 = 가능도비 × 사전 오즈의 식으로도 구하라.

A9 독립인 두 사건 ★

정의 5.7, 정리 5.8 · 6분

A와 B가 독립이고 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.4$이다. (a) $P(A\cup B)$, (b) $P(A\mid A\cup B)$, (c) $P(A^c\cap B^c)$를 구하라. (c)는 두 가지 방법으로 구하라.

A10 직렬과 병렬 ★

정리 5.11 · 8분

부품 1과 2를 병렬로(둘 가운데 하나만 작동해도 된다) 묶고, 그 묶음을 부품 3과 직렬로(둘 다 작동해야 한다) 연결했다. 세 부품은 상호 독립으로 각각 확률 0.9로 작동한다. 시스템이 작동할 확률을 구하라.

A11 분포함수에서 확률 읽기 ★★

정리 6.3 · 10분

확률변수 X의 분포함수가 다음과 같다.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x+1}{4} & 0\le x<1\\ \frac{3}{4} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

(a) $P(X=0)$, (b) $P(X=1)$, (c) $P(\frac{1}{2}<X\le 2)$, (d) $P(X<2)$를 구하라. X는 이산인가, 연속인가?

A12 밀도의 상수 ★

정의 6.6, 정리 6.7 · 10분

$f(x) = cx(1-x)$ $(0 < x < 1)$, 그 밖에서 $f(x) = 0$이 밀도가 되게 하자. (a) c를 정하라. (b) $0 \le x \le 1$에서 분포함수 $F(x)$를 구하라. (c) $P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})$를 구하라.

A13 처음 앞면이 짝수 번째 ★★

정리 4.9, 5.11 · [T5] · 10분

앞면이 나올 확률이 p $(0 < p < 1)$인 동전을 앞면이 나올 때까지 독립적으로 던진다. (a) 처음 앞면이 짝수 번째에 나올 확률을 p의 식으로 구하라. (b) $p = \frac{1}{2}$이면 얼마인가?

A14 같은 달에 태어난 두 사람 ★

정리 1.2, 4.3(c) · 6분

네 사람의 생일 달이 12달 가운데 서로 독립이고 균등하다. 같은 달에 태어난 두 사람이 있을 확률을 구하라.

B

빈칸 증명

노트의 단계형 증명을 책을 덮고 다시 쓴다. 같은 정리를 세 번 만나며 도움이 줄어든다. ① 단계는 주어지고 근거만 빈칸이다. ② 단계의 이름만 주어진다. ③ 전략만 주어진다. 근거에는 공리 번호, 정의나 정리의 번호, 도구 번호를 쓴다.

B1 연속성, 근거 채우기 ★

① · 정리 4.7(a) · 15분

$A_n \uparrow A$이면 $P(A_n) \uparrow P(A)$이다. 각 단계의 근거를 써라.

① $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $(n \geq 2)$로 둔다. 정의

② B_n들은 쌍마다 서로소다. 왜? _____

③ $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$이고 $A = \bigcup_k B_k$이다. 왜? _____

④ ①–③을 공리에 넣는다.

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) \quad \text{왜? } _____$$

$$= \lim_n \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \quad \text{왜? } _____$$

$$= \lim_n P(A_n) \quad \text{왜? } _____$$

⑤ $P(A_n)$은 n에 대해 증가한다. 왜? _____

B2 포함배제, 근거와 부호 채우기 ★★

① · 정리 4.5 · 20분

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$ 의 귀납법 증명이다. 근거와 부호를 채워라.

① $n = 1$이면 자명하고 $n = 2$이면 두 사건의 공식이다. 왜? _____

② n에서 성립한다고 하고 $B = A_1 \cup \cdots \cup A_n$으로 두면 $P(B \cup A_{n+1}) = P(B) + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1})$이다. 왜? _____

③ $B \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i A_{n+1})$이다. 왜? _____

④ $P(B \cap A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cdots A_{i_k} A_{n+1})$이다.

왜? _____

⑤ j개짜리 교집합이 나오는 부호를 센다.

- A_{n+1}을 포함하지 않는 교집합: $P(B)$의 전개에서 부호 _____
- A_{n+1} 하나뿐: $+P(A_{n+1})$, 부호 _____
- A_{n+1}과 다른 $k = j - 1$개: $-P(B \cap A_{n+1})$에서 부호 _____

⑥ 모든 j개짜리 교집합이 부호 $(-1)^{j+1}$로 한 번씩 나오므로 $n+1$에서 성립한다.

왜? _____

B3 분포함수의 성질, 근거 채우기 ★★

① · 정리 6.3(b)(c)(d) · 15분

분포함수 $F(x) = P(X \le x)$에 대한 증명이다. 근거를 채워라.

① $\{X \le -n\}$은 감소하고 $\bigcap_n \{X \le -n\} = \varnothing$이다. 왜? _____

② $F(-n) \to 0$이다. 왜? _____

③ $\{X \le x + \frac{1}{n}\} \downarrow \{X \le x\}$이다. 왜? _____

④ $F(x + \frac{1}{n}) \to F(x)$이고, F가 비감소이므로 $\lim_{y \downarrow x} F(y) = F(x)$이다.

왜? _____

⑤ $\{X \le x - \frac{1}{n}\} \uparrow \{X < x\}$이므로 $F(x-) = P(X < x)$이다. 왜? _____

⑥ $P(X = x) = F(x) - F(x-)$이다. 왜? _____

B4 연속성, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 4.7 · 25분

정리 4.7의 (a)와 (b)를 증명하라. 단계의 이름만 주어진다. 각 단계 아래에 식과 근거를 써라.

① **서로소인 조각 B_n을 정의한다**

② **조각들이 쌍마다 서로소임을 보인다**

③ **A_n과 A를 조각으로 쓴다**

④ **공리와 급수의 정의로 $P(A) = \lim_n P(A_n)$을 얻는다**

⑤ **(b) 감소하는 열을 여사건으로 증가하는 열로 바꾼다**

⑥ **(a)를 쓰고 여사건 공식으로 되돌린다**

B5 포함배제, 단계의 이름만 ★★

② · 정리 4.5 · 30분

정리 4.5를 n에 대한 귀납법으로 증명하라.

① **기저**

② **두 사건의 공식으로 사건 하나를 더한다**

③ **새로 생긴 교집합을 분배법칙으로 쓴다**

④ **귀납 가정을 두 번 쓴다**

⑤ **j개짜리 교집합의 부호를 세 경우로 센다**

⑥ **결론**

B6 연속성, 전략만 ★★ ③ · 정리 4.7 · 30분

정리 4.7을 증명하라.

전략 증가하는 열은 서로소인 조각으로 쪼개 급수의 부분합으로 만든다. 감소하는 열은 여사건으로 바꾼다.

B7 분포함수의 성질, 전략만 ★★

③ · 정리 6.3 · 35분

정리 6.3의 (a)–(d)를 모두 증명하라.

전략 F의 극한을 사건열의 극한으로 바꾸고 연속성(정리 4.7)을 쓴다. F가 비감소이므로 한쪽 극한은 단조로운 수열 하나를 따라 구하면 된다.

C

증명 문제

노트의 정리를 변형하고, 일반화하고, 반례로 경계를 확인한다. 증명은 노트의 단계형 모양으로 쓴다. 한 줄에 한 단계, 줄마다 근거.

C1 대칭차 ★ [T1] · 정리 4.3 · 15분

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$를 A와 B의 **대칭차**라 한다. 다음을 보여라.

(a) $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$

(b) $|P(A) - P(B)| \le P(A \triangle B)$

(c) $P(A \triangle C) \le P(A \triangle B) + P(B \triangle C)$

C2 모두 함께 일어날 확률의 하한 ★★

[T1] · 정리 4.3(g) · 15분

(a) 사건 $A_1, \dots, A_n$에 대해 $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$을 보여라.

(b) $\sum_i P(A_i) > n - 1$이면 $A_1, \dots, A_n$이 모두 함께 일어날 확률이 양수임을 보여라.

(c) 확률이 각각 0.99인 사건 50개가 모두 일어날 확률의 (a)의 하한을 구하라. 사건이 몇 개이면 이 하한이 0이 되는가?

C3 사건열의 상극한과 하극한 ★★

[T5] · 정리 4.7 · 20분

사건열 $A_1, A_2, \dots$에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$\limsup_{n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k, \qquad \liminf_{n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

(a) $\omega \in \limsup_n A_n$은 ω가 무한히 많은 A_n에 속한다는 것과 같고, $\omega \in \liminf_n A_n$은 유한 개를 빼고 모든 A_n에 속한다는 것과 같음을 보여라.

(b) $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$이고 $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c$임을 보여라.

(c) 다음을 보여라.

$$P\left(\liminf_{n} A_n\right) \leq \liminf_{n} P(A_n) \leq \limsup_{n} P(A_n) \leq P\left(\limsup_{n} A_n\right)$$

C4 Borel–Cantelli의 첫째 보조정리 ★★

[T5] · C3, 정리 4.3(g) · 15분

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ 이면 $P(\limsup_n A_n) = 0$, 곧 확률 1로 유한개의 A_n 만 일어남을 보여라.

(b) $P(A_n) = 1/n^2$ 이면 무한히 많은 A_n 이 일어날 확률은 얼마인가?

(c) 거꾸로는 성립하지 않는다. U 가 $\mathrm{U}(0,1)$ 이고 $A_n = \{U < 1/n\}$ 이면 $\sum_n P(A_n) = \infty$ 인데 $P(\limsup_n A_n) = 0$ 임을 보여라.

C5 조건부 독립은 독립이 아니다 ★★

[T2] · 정리 5.4 · 20분

앞면이 나올 확률이 0.9인 동전과 0.1인 동전이 있다. 같은 확률로 하나를 골라, 고른 동전을 독립적으로 두 번 던진다. C를 첫째 동전을 고른 사건, H_i를 i번째가 앞면인 사건이라 하자.

(a) 이 실험의 확률공간 (Ω, P)를 적고, $P(H_1 H_2 \mid C) = P(H_1 \mid C)P(H_2 \mid C)$이며 C^c에서도 그러함을 확인하라.

(b) $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(H_1 H_2)$를 구해 H_1과 H_2가 독립이 아님을 보여라.

(c) $P(H_2 \mid H_1)$을 구하라. 첫 결과가 둘째 결과에 대해 무엇을 알려 주는지 설명하라.

C6 Bonferroni 부등식, 셋째 항까지 ★★★

[T3] · 정리 1.5, 4.9 · 25분

Ω가 유한하거나 셀 수 있고 P가 정리 4.9의 이산 확률 $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$이다. S_k는 노트 4.4절의 기호다.

(a) 모든 $m \ge 1$, $j \ge 0$에서 $\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^j \binom{m-1}{j}$임을 j에 대한 귀납법으로 보여라.

(b) $A_1, \dots, A_n$ 가운데 정확히 $m \ge 1$개에 속하는 점 ω는 $S_1 - S_2 + S_3$에 $\left[\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3}\right] p(\omega)$만큼 기여함을 보여라. 어느 A_i에도 속하지 않는 점은?

(c) (a)와 (b)로 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le S_1 - S_2 + S_3$을 보여라.

C7 σ-대수의 교집합과 합집합 ★★

[T1], [T2] · 정의 4.1 · 20분

(a) σ-대수 $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$의 교집합 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$가 σ-대수임을 보여라. 임의 개의 σ-대수의 교집합도 그러한가?

(b) $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \{2\}, \{1,3\}, \Omega\}$에서 $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$가 σ-대수가 아님을 보여라.

(c) Ω의 부분집합의 모임 $\mathcal{A}$를 포함하는 σ-대수 가운데 가장 작은 것 $\sigma(\mathcal{A})$가 있음을 (a)로 보여라. $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{A} = \{\{1\}\}$이면 $\sigma(\mathcal{A})$는 무엇인가?

C8 유리수에서 같은 두 분포함수 ★★

[T5] · 정리 6.3(c) · 15분

두 분포함수 F와 G가 모든 유리수 q에서 $F(q) = G(q)$이면 모든 실수 x에서 $F(x) = G(x)$임을 보여라. 유리수 대신 어떤 성질을 갖는 집합이면 같은 결론이 나오는가?

C9 조건부확률 안의 전확률 공식 ★

정리 5.2, 5.4 · 10분

$P(BC) > 0$, $P(BC^c) > 0$이면 다음이 성립함을 두 가지로 보여라.

$$P(A \mid B) = P(A \mid BC)\,P(C \mid B) + P(A \mid BC^c)\,P(C^c \mid B)$$

(a) 조건부확률의 정의를 직접 써서. (b) $Q = P(\cdot \mid B)$가 확률이라는 정리 5.2와 전확률 공식을 Q에 써서. 이때 $Q(A \mid C) = P(A \mid BC)$임을 확인하라.

D

퀄형

여러 절의 도구를 잇는 종합 문제다. 머리의 제한 시간을 재고, 노트를 덮고 푼다. 모형을 확률공간으로 적는 것부터 답안의 일부다.

D1 Banach의 성냥갑 ★★★

정리 1.4, 5.11 · 제한 35분

한 수학자가 성냥이 N개씩 든 갑 두 개를 양쪽 주머니에 하나씩 넣고 다닌다. 성냥이 필요할 때마다 같은 확률로, 앞의 선택들과 독립으로 한쪽 주머니를 고른다. 고른 갑이 비어 있는 것을 처음 발견하는 순간에 다른 갑에 남은 성냥의 수를 K라 하자.

(a) $k = 0, 1, \dots, N$에서 $P(K = k) = \binom{2N-k}{N} 2^{-(2N-k)}$임을 보여라.

(b) (a)에서 항등식 $\sum_{k=0}^{N} \binom{2N-k}{N} 2^{k} = 2^{2N}$을 얻어라. 이때 무엇을 확인해야 하는가?

(c) $N = 5$이면 $P(K = 0)$은 얼마인가?

D2 도박꾼의 파산 ★★★

[T2], [T5] · 정리 4.7, 5.4, 5.13 · 제한 40분

판마다 확률 p로 1원을 따고 $q = 1 - p$로 1원을 잃는다. 판들은 독립이고 $p \neq \frac{1}{2}$이다. 가진 돈이 i원$(0 < i < N)$에서 시작해 N원이 되거나 0원이 되면 멈춘다. h_i를 N원에 먼저 닿을 확률이라 하고 $h_0 = 0$, $h_N = 1$로 둔다.

(a) 게임이 영원히 끝나지 않을 확률이 0임을 보여라.

(b) 첫 판에 대한 전확률 공식으로 $h_i = p\,h_{i+1} + q\,h_{i-1}$ $(0 < i < N)$을 보여라.

(c) 이 재귀와 경계조건을 만족하는 수열은 하나뿐임을 보이고 다음을 확인하라.

$$h_i = \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}$$

(d) $p = 0.4$, $i = 5$, $N = 10$이면 h_5는 얼마인가? 공정한 게임$(p = \frac{1}{2})$이면 $h_i = i/N$이다. 비교하라.

D3 Pólya의 항아리 ★★★

[T3] · 정리 5.3, 5.4, 5.5 · 제한 30분

빨간 공 r개와 파란 공 b개가 든 항아리에서 공을 하나 꺼내 색을 보고, 그 공을 같은 색의 공 c개와 함께 다시 넣는다. 이것을 되풀이한다. R_n을 n번째에 꺼낸 공이 빨강인 사건이라 하자.

(a) $P(R_2) = \frac{r}{r+b}$임을 보여라.

(b) $P(R_1 \mid R_2)$를 구하라. $P(R_1)$보다 큰가?

(c) 모든 $n \geq 1$에서 $P(R_n) = \frac{r}{r+b}$임을 보여라.

(d) $r = b = c = 1$이면 $P(R_1 R_2 R_3)$은 얼마인가?

D4 크랩스 ★★★

[T5] · 정리 4.7, 4.9, 5.4 · 제한 35분

주사위 두 개의 합으로 하는 게임이다. 첫 굴림이 7이나 11이면 이기고, 2, 3, 12이면 진다. 그 밖의 합 $s \in \{4,5,6,8,9,10\}$이 나오면 s가 "포인트"가 되고, 그 뒤로 굴려 s가 7보다 먼저 나오면 이기고 7이 먼저 나오면 진다. 굴림들은 독립이다. 한 번 굴려 합이 s일 확률을 π_s라 하자.

(a) 포인트가 s일 때 s가 7보다 먼저 나올 확률이 $\dfrac{\pi_s}{\pi_s+\pi_7}$임을 보여라. s도 7도 영원히 나오지 않을 확률이 0임도 보여라.

(b) 포인트가 4일 때 이 확률은 얼마인가?

(c) 이길 확률이 $\dfrac{244}{495}$임을 보여라.

힌트와 최종답

막히면 먼저 힌트를 보고, 다 푼 뒤에 최종답과 맞춰 본다. 그래도 어긋나면 풀이판을 본다. 최종답은 노트북의 `check()`로도 확인할 수 있다.

A1 힌트 글자를 늘어놓는 대신 11개의 자리 가운데 각 글자가 들어갈 자리를 차례로 고른다고 생각한다. 곱의 법칙(정리 1.1)과 조합의 수(정리 1.4).

답 34,650

A2 힌트 해 하나를 별 10개와 막대 3개를 한 줄로 늘어놓은 것으로 바꿔 본다. 막대가 별을 네 묶음으로 나눈다.

답 $\binom{13}{3} = 286$

A3 힌트 $(a,b,c) \mapsto (7-a,\,7-b,\,7-c)$는 216가지 결과를 자기 자신으로 일대일 대응시키고, 합 s를 $21-s$로 보낸다.

답 $\frac{1}{2}$

A4 힌트 A_d를 d의 배수의 집합으로 두고 $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$를 포함배제로 센다. $A_2 \cap A_3 = A_6$이고 $|A_d| = \lfloor 1000/d \rfloor$이다.

답 266

A5 힌트 (b) B_i를 눈 i가 한 번도 나오지 않는 사건이라 하면 $p_n = 1 - P(B_1 \cup \cdots \cup B_6)$이다. k개의 눈을 모두 피하는 결과의 수는 $(6-k)^n$이다.

답 (a) $\frac{5}{324} \approx 0.0154$ (b) $\frac{38045}{139968} \approx 0.2718$

A6 힌트 조건 사건 안에 들어 있는, 같은 확률의 순서쌍을 모두 적는다.

답 $\frac{2}{5}$

A7 힌트 공장들이 분할을 이룬다. (a)는 전확률 공식, (b)는 베이즈 정리.

답 (a) 0.021 (b) $\frac{10}{21} \approx 0.476$

A8 힌트 항아리가 정해지면 세 번의 추출은 상호 독립이다. 사전 오즈는 1이다.

답 $\frac{27}{28}$

A9 힌트 (b)에서 $A \cap (A \cup B) = A$이다. (c)는 여사건과의 독립(정리 5.8)이나 De Morgan으로.

답 (a) 0.58 (b) $\frac{15}{29}$ (c) 0.42

A10 힌트 작동하는 사건을 $(W_1 \cup W_2) \cap W_3$으로 쓴다. 병렬 묶음이 고장 나는 사건은 $W_1^c W_2^c$이다.

답 0.891

A11 힌트 점의 확률은 그 점에서 F가 뛰는 높이 $F(x) - F(x-)$이다(정리 6.3(d)). F를 그려 보면 뛰는 점이 세 곳이다.

답 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{5}{8}$ (d) $\frac{3}{4}$

A12 힌트 (a)는 정리 6.7(a). (c)는 (b)의 F로 $F(\frac{3}{4}) - F(\frac{1}{4})$. 대칭이므로 $F(\frac{1}{4}) + F(\frac{3}{4}) = 1$인지 확인해 본다.

답 (a) $c = 6$ (b) $3x^2 - 2x^3$ (c) $\frac{11}{16}$

A13 힌트 $E_k = \{$처음 앞면이 k번째$\}$이면 $P(E_k) = q^{k-1}p$이고 E_k들은 쌍마다 서로소다. 짝수 번째인 사건은 $\bigcup_j E_{2j}$이다. 기하급수 [T5].

답 (a) $\frac{1-p}{2-p}$ (b) $\frac{1}{3}$

A14 힌트 여사건은 네 사람의 달이 모두 다른 것이다. 순열의 수(정리 1.2).

답 $\frac{41}{96} \approx 0.427$

B1 힌트 근거는 짧게 쓴다. 예: "(P3)", "정리 4.3(d)", "[T1] 원소 추적". 둘째 단계는 $m < n$일 때 B_m과 A_{n-1}의 관계를 쓴다.

B2 힌트 귀납 가정은 두 번 쓰인다. 한 번은 $P(B)$에, 한 번은 n개의 사건 $A_1A_{n+1}, \dots, A_nA_{n+1}$에.

B3 힌트 극한을 사건열의 극한으로 바꾸는 곳마다 연속성(정리 4.7)의 (a)인지 (b)인지를 구별한다. 증가하면 (a), 감소하면 (b).

B4 힌트 B1에서 채운 근거를 다시 보지 말고 쓴다. (b)의 첫 단계에는 De Morgan이 필요하다.

B5 힌트 세 경우는 "A_{n+1}을 포함하지 않는다", "A_{n+1} 하나뿐이다", "A_{n+1}과 다른 사건들의 교집합이다"이다.

B6 힌트 단계는 여섯이다. 증명을 다 쓴 뒤, 각 등호의 근거가 공리 (P1)–(P3), 유한가법성, 단조성, 여사건 공식, De Morgan 가운데 무엇인지 확인한다.

B7 힌트 (c)에서 왜 "오른쪽" 인지 설명할 수 있어야 한다. $\{X \le x - \frac{1}{n}\}$의 합집합은 $\{X \le x\}$가 아니라 $\{X < x\}$이다.

C1 힌트 (a) $A \setminus B = A \setminus AB$이다. (c)는 $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$를 원소 추적으로 보이고 Boole 부등식을 쓴다. $\omega \in A \setminus C$일 때 $\omega \in B$인 경우와 아닌 경우로 나눈다.

C2 힌트 교집합의 여사건은 여사건들의 합집합이다(De Morgan). 그다음은 Boole 부등식이다.

답 (c) $\frac{1}{2}$

C3 힌트 (c) $C_n = \bigcap_{k \ge n} A_k$는 증가하고 $C_n \subset A_n$이다. $D_n = \bigcup_{k \ge n} A_k$는 감소하고 $D_n \supset A_n$이다. 연속성과 수열의 상극한·하극한의 정의 [T5].

C4 힌트 (a) 모든 n에서 $\limsup A_k \subset \bigcup_{k \ge n} A_k$이다. 수렴하는 급수의 꼬리 $\sum_{k \ge n} P(A_k)$는 0으로 간다 [T5]. (c) A_n은 감소한다.

C5 힌트 $\Omega = \{1,2\} \times \{\text{앞}, \text{뒤}\}^2$이고 $P(c, h_1, h_2) = \frac{1}{2} p_c^{\#\text{앞}} (1-p_c)^{\#\text{뒤}}$이다. (b)는 전확률 공식을 $\{C, C^c\}$에 쓴다.

답 (b) $P(H_1 H_2) = 0.41$ (c) 0.82

C6 힌트 (a) $j \to j+1$에서 $(-1)^{j+1}\binom{m}{j+1}$을 더하고 Pascal의 항등식 $\binom{m}{j+1} = \binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j+1}$을 쓴다. (c) 계수가 $1 - (-1)^3\binom{m-1}{3}$이 된다.

C7 힌트 (b) 반례 하나면 된다. 두 원소의 합집합을 본다. (c) $\mathcal{A}$를 포함하는 σ-대수는 적어도 하나 있다. 모든 부분집합의 모임이다.

C8 힌트 x보다 크면서 x로 다가가는 유리수열 $q_n \downarrow x$를 잡고 오른쪽 연속성(정리 6.3(c))을 쓴다.

C9 힌트 (a) 오른쪽 각 항에 정의를 넣으면 $P(ABC)/P(B)$와 $P(ABC^c)/P(B)$가 된다.

D1 힌트 왼쪽 갑이 비었음을 발견하고 오른쪽에 k개가 남는 사건은 "처음 $2N-k$번 가운데 왼쪽이 정확히 N번이고, 그다음 번이 왼쪽" 인 사건이다. 왼쪽과 오른쪽을 바꾼 사건과 합친다.

답 (a) $\binom{2N-k}{N} 2^{-(2N-k)}$ (c) $\frac{63}{256} \approx 0.246$

D2 힌트 (a) N판을 연속으로 따면 어디서 시작하든 끝난다. 겹치지 않는 N판짜리 묶음 m개가 모두 "연속 N승" 이 아닐 확률은 $(1-p^N)^m$이다. 연속성(정리 4.7(b)). (c) 두 해의 차 d_i는 같은 재귀와 $d_0 = d_N = 0$을 만족한다. d_i가 가장 큰 곳을 생각한다.

답 (c) $\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}$ (d) $\frac{32}{275} \approx 0.116$

D3 힌트 (c) 명제를 "모든 $r, b > 0$에 대해 $P_{r,b}(R_n) = \frac{r}{r+b}$"로 강하게 잡고 n에 대한 귀납법을 쓴다. 첫 번째 꺼냄에 대한 전확률 공식을 쓰면, 첫 꺼냄 뒤의 과정은 구성이 바뀐 새 항아리다.

답 (a) $\frac{r}{r+b}$ (b) $\frac{r+c}{r+b+c}$ (d) $\frac{1}{4}$

D4 힌트 (a) E_k를 "포인트 뒤 $k-1$번은 s도 7도 아니고 k번째가 s"인 사건이라 하면 E_k들은 쌍마다 서로소이고 $P(E_k) = (1-\pi_s-\pi_7)^{k-1}\pi_s$이다. (c) π_s는 $s=7$에서 가장 크고 대칭이다: $\pi_s = \frac{6-|s-7|}{36}$.

답 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{244}{495} \approx 0.4929$