부록 소책자

증명 도구 상자

T1 – T8

수리통계학의 증명은 몇 가지 도구를 되풀이해 쓴다. 집합 등식을 원소로 확인하고, 대우와 귀류로 방향을 바꾸고, 귀납법으로 n을 하나씩 늘리고, 부등식을 잇고, 극한을 ε으로 다루고, 극한과 적분의 순서를 바꾸고, 변수를 바꾸고, Taylor 전개로 근사한다. 이 소책자는 그 여덟 가지를 T1–T8로 모아, 원리와 표준 예와 흔한 실수와 손으로 풀 연습으로 정리한다.

T1	집합 등식: 원소 추적과 지시함수	1회부터
T2	대우와 귀류, 반례	1회부터
T3	귀납법과 재귀적 정의	1회부터
T4	부등식: 더하고 빼기, Cauchy–Schwarz, 볼록성	2회부터
T5	ε–N, 급수, 상극한과 하극한	1회부터
T6	극한과 적분의 교환	2회부터
T7	변수변환과 Jacobian	2회부터
T8	Taylor 전개와 o, O, o_p, O_p	7회부터

쓰는 곳 강의노트와 워크북의 [T5] 표시가 이 소책자의 5절을 가리킨다

선수 지식 고등학교 수학, 1학년 미적분(극한, 미분, 리만적분)

풀이 모든 연습문제의 풀이가 부록 A에 있다

이 소책자를 쓰는 법

강의노트와 워크북의 증명에서 어떤 단계의 근거가 [T1], [T6]처럼 적혀 있으면, 그 단계는 이 소책자의 해당 절의 도구를 쓴다. 절 번호가 도구 번호다. 1절이 T1이고 8절이 T8이다. 회차를 공부하다가 표시를 만나면 그 절의 원리와 예를 읽고, 연습을 몇 개 손으로 풀고 돌아간다.

각 절은 **쓰는 곳 → 원리 → 표준 예 → 흔한 실수 → 연습문제** 순서다. 이 과정의 범위를 넘어 증명하지 않는 사실(T6의 수렴 정리, T7의 다중적분 치환 등)은 **증명 없이 쓰는 사실** 상자에 정확한 조건과 함께 밝힌다.

단계형 증명

증명은 다음 형식으로 쓴다. 첫 줄에 **전략**을 한 문장으로 적고, 단계마다 번호를 붙이고, 각 단계의 근거를 줄 오른쪽 끝에 회색 글씨로 적는다. 별행 식의 근거도 식의 오른쪽 끝에 온다.

보기. **전략** 두 집합이 서로를 포함함을 보인다.

① $\omega \in A$를 아무것이나 잡는다. — 이중 포함 [T1]

② $\omega \in B$임을 보인다. 그러면 $A \subset B$이다. — 부분집합의 정의

③ 같은 방법으로 $B \subset A$를 보인다. — ①②

$$A = B \qquad ②③$$

■

읽을 때는 근거를 가리고 각 단계의 근거를 먼저 말해 본 뒤 확인한다.

연습문제 난이도는 ★ 계산·확인, ★★ 증명·응용, ★★★ 도전이다. 문제 끝의 **풀이 ○○쪽**을 누르면 부록 A의 풀이로 간다.

차례

1 T1 집합 등식: 원소 추적과 지시함수 1

1.1 원소 추적 1

1.2 지시함수 2

1.3 역상 3

2 T2 대우와 귀류, 반례 5

2.1 조건문과 대우 5

2.2 양화사의 부정 6

2.3 귀류법 6

2.4 반례 7

3 T3 귀납법과 재귀적 정의 9

3.1 정렬원리와 귀납법 9

3.2 재귀적 정의와 유일성 10

4 T4 부등식과 볼록성 13

4.1 더하고 빼기와 삼각부등식 13

4.2 Cauchy–Schwarz 부등식 14

4.3 볼록성과 Jensen 부등식 15

4.4 지수와 로그의 부등식 16

5 T5 ε–N, 급수, 상극한과 하극한 18

5.1 수열의 극한 18

5.2 상극한과 하극한 19

5.3 급수 20

5.4 사건열의 상극한과 하극한 21

6 T6 극한과 적분의 교환 **23**

6.1 순서를 바꿀 수 없는 경우 . . . 23

6.2 순서를 바꿀 수 있는 조건 . . . 23

6.3 표준 예 . . . 25

7 T7 변수변환과 Jacobian **28**

7.1 1차원 치환 . . . 28

7.2 다차원 치환 . . . 29

8 T8 Taylor 전개와 o, O, o_p, O_p **32**

8.1 Taylor 정리 . . . 32

8.2 o와 O . . . 33

8.3 확률적 o_p와 O_p . . . 34

A 연습문제 풀이 **37**

1

T1 집합 등식: 원소 추적과 지시함수

확률은 사건에 붙는 수이고 사건은 집합이다. 그래서 확률에 대한 등식의 상당수는 먼저 집합에 대한 등식으로 증명한다. 1회의 기본 성질, 포함배제, 연속성의 증명이 모두 이 절의 두 방법, 곧 원소 추적과 지시함수를 쓴다.

1.1 원소 추적

두 집합이 같다는 것은 서로를 포함한다는 것이다.

$$A = B \iff A \subset B \text{ 이고 } B \subset A.$$

$A \subset B$를 보이려면 A의 원소 ω를 **아무것이나** 잡고 $\omega \in B$임을 보인다. 이것을 **원소 추적**(element chasing) 또는 이중 포함이라 한다. 등호의 양쪽을 각각 "ω가 어떤 조건을 만족한다"는 문장으로 바꾸고, 두 문장이 같은 뜻임을 확인하는 것이다.

보조정리 1.1 (분배법칙) 임의의 집합족 $\{B_i\}_{i\in I}$에 대해

$$A \cap \Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i), \qquad A \cup \Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i).$$

증명. **전략** 첫 식의 양쪽을 ω에 대한 문장으로 바꾼다. 둘째 식은 첫 식에 De Morgan을 쓴다.

① $\omega \in A \cap (\bigcup_i B_i) \iff \omega \in A$이고, 어떤 i에 대해 $\omega \in B_i$이다. — 교집합과 합집합의 정의

② $\iff$ 어떤 i에 대해 $\omega \in A$이고 $\omega \in B_i$이다. — $\omega \in A$는 i와 무관하다

③ $\iff \omega \in \bigcup_i (A \cap B_i)$. 따라서 첫 식이 성립한다. — 합집합의 정의

④ 첫 식을 A^c와 $\{B_i^c\}$에 쓰고 양변의 여집합을 취하면 둘째 식이 나온다. — De Morgan

■

예제 1.2 (서로소 조각 만들기) 사건 $A_1, A_2, \dots$ 에 대해 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$로 두면

$$\text{(i) } B_n \subset A_n, \qquad \text{(ii) } B_m \cap B_n = \varnothing \ (m \neq n), \qquad \text{(iii) } \bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n.$$

(i)은 정의에서 바로 나온다. (ii) $m < n$이면 $B_m \subset A_m \subset A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$이고 B_n은 이 합집합과 만나지 않는다. (iii) $\subset$는 (i)에서 나온다. $\supset$: $\omega \in \bigcup_n A_n$이면 $\omega \in A_n$인 n 가운데 가장 작은 것 m이 있다(자연수의 정렬원리, [T3]). 그러면 $\omega \in A_m$이고 $\omega \notin A_1 \cup \cdots \cup A_{m-1}$이므로 $\omega \in B_m$이다.

이 조각들로 Boole 부등식 $P(\bigcup_n A_n) \le \sum_n P(A_n)$이 나온다. (iii)과 (ii)로 왼쪽은 $\sum_n P(B_n)$이고, (i)과 단조성으로 $P(B_n) \le P(A_n)$이다.

1.2 지시함수

정의 1.3 (지시함수) 집합 $A \subset \Omega$의 **지시함수**(indicator function)는 $\omega \in A$이면 $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$, 아니면 $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$인 함수 $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$이다.

지시함수를 쓰면 집합 연산이 수의 연산으로 바뀐다. 두 함수가 같다는 것은 모든 점에서 값이 같다는 것이므로, 증명은 ω의 위치에 따른 경우 나누기가 된다.

명제 1.4 (지시함수의 대수) 집합 A, B와 쌍마다 서로소인 집합 $A_1, A_2, \dots$ 에 대해

(a) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$, $\quad \mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$.

(b) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B)$.

(c) $A \subset B \iff \mathbf{1}_A \le \mathbf{1}_B$, $\quad A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

(d) $\mathbf{1}_{\bigcup_i A_i} = \sum_i \mathbf{1}_{A_i}$ (쌍마다 서로소일 때).

증명. **전략** 함수의 등식은 점마다의 등식이다. ω가 A, B에 속하는지에 따라 네 경우를 표로 확인한다.

① (a), (b)의 양변을 $(\mathbf{1}_A(\omega), \mathbf{1}_B(\omega))$의 네 값에서 계산한다.

$\mathbf{1}_A$	$\mathbf{1}_B$	$\mathbf{1}_{A\cap B}$	$\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$	$\mathbf{1}_{A\cup B}$	$\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0

같은 줄의 값이 같다. $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$도 두 경우로 확인한다. (b)의 둘째 꼴은 첫째 꼴을 전개한 것이다. 경우 나누기

② (c) $A \subset B$이면 $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$일 때 $\omega \in B$이므로 $\mathbf{1}_B(\omega) = 1$이다. 거꾸로 $\mathbf{1}_A \le \mathbf{1}_B$이면 $\omega \in A$에서 $1 \le \mathbf{1}_B(\omega)$이므로 $\omega \in B$다. 등호는 두 방향의 포함을 합친 것이다. 원소 추적

③ (d) ω가 합집합에 없으면 양변이 0이다. 있으면 쌍마다 서로소이므로 정확히 하나의 A_i에 속하고, 오른쪽 합에서 그 항 하나만 1이다. 서로소

■

예제 1.5 (포함배제의 점별 형태) 사건 $A_1, \dots, A_n$에 대해 (a)와 (b)를 되풀이하면

$$\mathbf{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mathbf{1}_{A_{i_1}} \cdots \mathbf{1}_{A_{i_k}}.$$

첫 등호는 $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c$(De Morgan)의 지시함수를 (a)로 쓴 것이다. 둘째 등호는 곱을 전개한 것이고, $\mathbf{1}_{A_{i_1}} \cdots \mathbf{1}_{A_{i_k}} = \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}$이다. 양변의 기댓값을 취하면 포함배제 공식이 나온다. 1회의 포함배제 증명 2(점마다 몇 번 세어지는가)를 함수의 등식 하나로 쓴 것이다.

1.3 역상

확률변수는 함수 $X : \Omega \to \mathbb{R}$이고, $\{X \in B\}$는 B의 **역상**(inverse image)

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

이다. 역상은 집합 연산과 순서를 바꿀 수 있다.

명제 1.6 (역상과 집합 연산) 함수 $X : \Omega \to \mathbb{R}$와 $\mathbb{R}$의 부분집합 B, $\{B_i\}_{i \in I}$에 대해

$$X^{-1}\Big(\bigcup_i B_i\Big) = \bigcup_i X^{-1}(B_i), \qquad X^{-1}\Big(\bigcap_i B_i\Big) = \bigcap_i X^{-1}(B_i), \qquad X^{-1}(B^c) = \big(X^{-1}(B)\big)^c.$$

증명. **전략** $\omega \in X^{-1}(\cdot)$를 $X(\omega) \in \cdot$로 바꾸면 세 식 모두 원소 추적 한 줄이다.

① $\omega \in X^{-1}(\bigcup_i B_i) \iff X(\omega) \in \bigcup_i B_i \iff$ 어떤 i에서 $X(\omega) \in B_i \iff \omega \in \bigcup_i X^{-1}(B_i)$.
역상과 합집합의 정의

② 교집합은 "어떤 i"를 "모든 i"로 바꾸면 같다. ①

③ $\omega \in X^{-1}(B^c) \iff X(\omega) \notin B \iff \omega \notin X^{-1}(B)$. 여집합의 정의

■

이 명제 때문에 $\{X \le b\} \setminus \{X \le a\} = \{a < X \le b\}$, $\bigcup_n \{X \le x - \frac{1}{n}\} = \{X < x\}$ 같은 사건의 계산을 실수 집합의 계산으로 바꿀 수 있다. 1회의 분포함수 성질의 증명이 이 계산을 쓴다.

흔한 실수 (1) $(A\cup B)\setminus B = A$는 거짓이다. 맞는 식은 $(A\cup B)\setminus B = A\setminus B$이고, $A\cap B\neq\varnothing$이면 둘은 다르다. (2) $\mathbf{1}_{A\cup B}=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B$는 $A\cap B=\varnothing$일 때만 맞다. $A=B$이면 오른쪽은 $2\mathbf{1}_A$이다. (3) 역상과 달리 **상**(image)은 교집합과 순서를 바꿀 수 없다. $f(\omega)=\omega^2$, $A=\{-1\}$, $B=\{1\}$이면 $f(A\cap B)=\varnothing$이지만 $f(A)\cap f(B)=\{1\}$이다.

연습문제

연습 1.1 (차집합의 분배 ★) 원소 추적으로 $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$와 $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$를 보여라. 풀이 37쪽

연습 1.2 (대칭차 ★) $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$로 정의한다. (a) $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$를 보여라. (b) $\mathbf{1}_{A\triangle B}=(\mathbf{1}_A-\mathbf{1}_B)^2=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$를 보여라. (c) (b)를 써서 $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$를 보여라. 풀이 37쪽

연습 1.3 (세 사건의 점별 포함배제 ★) $1-(1-\mathbf{1}_A)(1-\mathbf{1}_B)(1-\mathbf{1}_C)$를 전개해 $\mathbf{1}_{A\cup B\cup C}$를 일곱 개 지시함수의 부호 있는 합으로 써라. ω가 A와 B에만 속할 때 오른쪽이 1이 됨을 직접 확인하라. 풀이 37쪽

연습 1.4 (포함과 서로소의 여러 표현 ★★) 다음이 모두 같은 뜻임을 보여라. (i) $A\subset B$, (ii) $A\cap B^c=\varnothing$, (iii) $A\cup B=B$, (iv) $A\cap B=A$. 또 $A\cap B=\varnothing\iff\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B\le 1$을 보여라. 풀이 38쪽

연습 1.5 (역상 계산 ★) $\Omega=\{1,2,\dots,12\}$에서 $X(\omega)$를 ω를 3으로 나눈 나머지라 하자. $X^{-1}(\{0\})$, $X^{-1}(\{1,2\})$, $X^{-1}([0.5,\infty))$를 원소로 적고, $X^{-1}(\{1,2\})=(X^{-1}(\{0\}))^c$임을 확인하라. 풀이 38쪽

연습 1.6 (상은 교집합을 보존하지 않는다 ★★) 함수 $f:\Omega\to S$와 $A,B\subset\Omega$에 대해 (a) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$, (b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$를 보여라. (c) 모든 A,B에서 (b)가 등호인 것은 f가 일대일일 때와 그때뿐임을 보여라. 풀이 38쪽

연습 1.7 (합집합과 교집합의 지시함수 ★★) 임의의 집합족 $\{A_i\}_{i\in I}$에 대해 $\mathbf{1}_{\bigcup_i A_i}=\sup_i\mathbf{1}_{A_i}$, $\mathbf{1}_{\bigcap_i A_i}=\inf_i\mathbf{1}_{A_i}$임을 보여라. 풀이 38쪽

연습 1.8 (역상으로 만든 σ-대수 ★★) 함수 $X:\Omega\to\mathbb{R}$에 대해 $\mathcal{G}=\{X^{-1}(B):B\subset\mathbb{R}\}$이 Ω 위의 σ-대수임을 보여라. 풀이 38쪽

연습 1.9 (세 사건이 만드는 집합의 수 ★★★) 사건 A,B,C에서 합집합, 교집합, 여집합을 유한 번 써서 만들 수 있는 집합은 모두 여덟 개의 "원자" $A^{\pm}\cap B^{\pm}\cap C^{\pm}$($A^{+}=A$, $A^{-}=A^c$)의 합집합임을 보여라. 따라서 이런 집합은 많아야 $2^8=256$개다. (힌트: 만든 집합 S의 지시함수는 $(\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_B,\mathbf{1}_C)$의 함수다.) 풀이 38쪽

2

T2 대우와 귀류, 반례

정리는 대개 "p이면 q이다" 의 꼴이다. p에서 q로 바로 가는 길이 보이지 않으면 대우를 증명하거나, q가 거짓이라고 가정해 모순을 끌어낸다. 거꾸로 "모든 경우에 성립한다" 는 주장은 반례 하나로 깨진다. 1회 정리 7.1("자연수 위의 균등 확률은 없다")과 1회 예제 5.10(Bernstein의 정사면체)이 이 절의 두 방법이다.

2.1 조건문과 대우

정의 2.1 (역 · 이 · 대우) 조건문 $p \Rightarrow q$에 대해 $q \Rightarrow p$를 **역**, $\neg p \Rightarrow \neg q$를 **이**, $\neg q \Rightarrow \neg p$를 **대우**(contrapositive)라 한다.

명제 2.2 (대우는 같은 명제다) $p \Rightarrow q$와 $\neg q \Rightarrow \neg p$는 참·거짓이 같다. 역과 이는 원래 명제와 참·거짓이 다를 수 있다.

증명. **전략** $p \Rightarrow q$가 거짓인 경우는 "p가 참이고 q가 거짓" 뿐이다. 두 명제가 거짓이 되는 경우를 비교한다.

① $p \Rightarrow q$가 거짓 $\iff$ p 참, q 거짓. — 조건문의 정의

② $\neg q \Rightarrow \neg p$가 거짓 $\iff$ $\neg q$ 참, $\neg p$ 거짓 $\iff$ q 거짓, p 참. — ①을 $\neg q$, $\neg p$에 쓴다

③ 거짓이 되는 경우가 같으므로 참·거짓이 같다. 역 $q \Rightarrow p$는 p 거짓, q 참일 때 거짓이어서 원래 명제와 다르다. — ①②

■

예제 2.3 (제곱이 짝수이면) **주장.** 정수 n에서 n^2이 짝수이면 n은 짝수다. 직접 가면 $n^2 = 2m$에서 n을 끌어내야 해서 막힌다. 대우 "n이 홀수이면 n^2은 홀수" 는 한 줄이다. $n = 2k+1$이면 $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$이다.

확률에서도 같다. "$A \subset B$이고 $P(A) > 0$이면 $P(B) > 0$" 의 대우는 "$A \subset B$이고 $P(B) = 0$이면 $P(A) = 0$" 이고, 이것은 단조성 $P(A) \le P(B)$에서 바로 나온다.

2.2 양화사의 부정

"모든" (∀)과 "어떤" (∃)이 들어간 문장의 부정은 양화사를 바꾸고 안쪽을 부정한다.

$$\neg\big(\forall x\, P(x)\big) \iff \exists x\, \neg P(x), \qquad \neg\big(\exists x\, P(x)\big) \iff \forall x\, \neg P(x).$$

여러 겹이면 바깥부터 한 겹씩 바꾼다.

예제 2.4 (수렴하지 않는다) $a_n \to a$의 정의([T5])는 "$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N :\ |a_n - a| < \varepsilon$"이다. 한 겹씩 부정하면

$$a_n \not\to a \iff \exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N :\ |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

곧 어떤 ε에 대해 $|a_n - a| \geq \varepsilon$인 n이 끝없이 나온다. 수렴하지 않음을 보이려면 그런 ε 하나를 찾아 주면 된다.

2.3 귀류법

귀류법(proof by contradiction)은 결론 q가 거짓이라고 가정하고, 가정이나 이미 아는 사실과 어긋나는 결론을 끌어낸다. 그러면 q가 거짓일 수 없으므로 q는 참이다. 대우로 충분한 경우에는 대우로 쓰는 편이 읽기 쉽다. 귀류법은 결론이 "없다", "유한하지 않다", "유리수가 아니다" 처럼 부정의 꼴일 때 많이 쓴다.

정리 2.5 ($\sqrt{2}$는 무리수다) $\sqrt{2}$를 두 정수의 비로 쓸 수 없다.

증명. **전략** 기약분수로 썼다고 가정하고, 분자와 분모가 모두 짝수임을 보여 기약이라는 가정과 충돌시킨다.

① $\sqrt{2} = a/b$이고 a, b는 공약수가 1뿐인 양의 정수라고 가정한다. — 귀류 가정

② $a^2 = 2b^2$이므로 a^2은 짝수이고, 따라서 a는 짝수다. $a = 2c$로 쓴다. — 예제 2.3

③ $4c^2 = 2b^2$, 곧 $b^2 = 2c^2$이므로 b도 짝수다. — 예제 2.3

④ a, b가 공약수 2를 가지므로 ①과 모순이다. — ①②③

■

정리 2.6 (소수는 무한히 많다 (Euclid)) 소수의 개수는 유한하지 않다.

증명. **전략** 소수가 유한개라고 가정하고, 그 어느 것으로도 나누어지지 않는 1보다 큰 수를 만든다.

① 소수가 $p_1, \dots, p_m$ 뿐이라고 가정한다. 귀류 가정

② $N = p_1 p_2 \cdots p_m + 1$로 둔다. N을 어느 p_i로 나누어도 나머지는 1이다. 구성

③ $N \geq 2$이므로 N은 어떤 소수로 나누어진다. 그 소수는 $p_1, \dots, p_m$ 가운데 없다. 소인수의 존재 [T3]

④ ①과 모순이다.

■

예제 2.7 (자연수 위의 균등 확률) 1회 정리 7.1은 귀류법이다. $P(\{n\}) = c$인 확률이 **있다고** 가정하면, 가산가법성으로 $1 = \sum_n c$이다. 오른쪽은 $c = 0$이면 0이고 $c > 0$이면 발산한다. 어느 쪽이든 1이 아니므로 가정이 거짓이다. 경우를 나누어 모두 모순임을 보이는 것도 귀류법의 흔한 꼴이다.

2.4 반례

"모든 x에서 $P(x)$"는 $P(x)$가 거짓인 x 하나, 곧 **반례**로 거짓이 된다. 반례는 작게 만든다. 원소가 두세 개인 표본공간, 두 점에 몰린 분포, $n = 1$이나 $n = 2$가 첫 후보다.

예제 2.8 (쌍별 독립과 상호 독립) "세 사건이 쌍마다 독립이면 상호 독립이다"는 거짓이다. 1회 예제 5.10의 Bernstein 정사면체가 반례다. 네 면 가운데 세 면에 빨강·초록·파랑을 하나씩, 넷째 면에 세 색을 모두 칠하면 $P(R) = P(G) = P(B) = \frac{1}{2}$, 두 색이 함께 있을 확률은 모두 $\frac{1}{4}$이지만 $P(RGB) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$이다. 표본공간의 원소가 넷뿐이어서 손으로 모든 경우를 확인할 수 있다.

흔한 실수 (1) 역을 증명하고 원래 명제를 증명했다고 여긴다. "X와 Y가 독립이면 공분산이 0"의 역은 거짓이다(X가 $\{-1, 0, 1\}$ 위의 균등분포이고 $Y = X^2$이면 공분산은 0이지만 독립이 아니다). (2) 예를 여럿 확인하고 증명했다고 여긴다. $n^2 + n + 41$은 $n = 0, 1, \dots, 39$에서 모두 소수이지만 $n = 40$이면 $1681 = 41^2$이다. (3) 귀류 가정을 쓰지 않고 모순을 끌어낸다. 그런 "모순"은 가정과 무관하게 나온 것이므로 처음부터 계산이 틀렸다는 뜻이다.

연습문제

연습 2.1 (대우로 증명하기 ★) 정수 n에서 n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수임을 대우로 보여라. 풀이 39쪽

연습 2.2 (부정 쓰기 ★) 다음 문장의 부정을 양화사를 바꿔 써라. (a) 모든 $\varepsilon > 0$에 대해 어떤 N이 있어 $n \ge N$이면 $|a_n| < \varepsilon$이다. (b) 함수 F는 비감소다($x < y \Rightarrow F(x) \le F(y)$). (c) 사건 A_1, A_2, A_3은 상호 독립이다. 풀이 39쪽

연습 2.3 ($\sqrt{3}$은 무리수다 ★) 연습 2.1을 써서 $\sqrt{3}$이 무리수임을 귀류법으로 보여라. 풀이 39쪽

연습 2.4 ($\log_2 3$은 무리수다 ★★) $\log_2 3$이 무리수임을 보여라. (힌트: $\log_2 3 = a/b$이면 $3^b = 2^a$이다.) 풀이 39쪽

연습 2.5 (확률의 합이 1보다 작으면 ★★) 사건 $A_1, \dots, A_n$에서 $\sum_i P(A_i) < 1$이면 $P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) > 0$임을 보여라. 따라서 $A_1 \cup \cdots \cup A_n \neq \Omega$이다. 이것을 "$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$이면 $\sum_i P(A_i) \ge 1$"의 대우로 읽어라. 풀이 39쪽

연습 2.6 (반례 만들기 ★★) (a) A와 B가 독립이고 B와 C가 독립이지만 A와 C는 독립이 아닌 예를 들어라. (b) $P(A \mid B) > P(A)$이고 $P(B \mid C) > P(B)$이지만 $P(A \mid C) < P(A)$인 예를 원소가 세 개인 표본공간에서 들어라. 풀이 39쪽

연습 2.7 ($4k+3$ 꼴의 소수 ★★) $4k+3$ 꼴의 소수가 무한히 많음을 보여라. (힌트: 그런 소수가 $p_1, \dots, p_m$ 뿐이면 $N = 4p_1 \cdots p_m - 1$을 본다. $4k+1$ 꼴인 수들의 곱은 $4k+1$ 꼴이다.) 풀이 40쪽

연습 2.8 (한 점의 확률 ★★) (a) $[0,1]$의 모든 한 점 집합에 같은 양수 확률 c를 주는 확률은 없음을 귀류법으로 보여라. (b) 실수 위의 확률 P가 모든 x에서 $P(\{x\}) = 0$이면 $P(\mathbb{Q}) = 0$임을 보여라. 같은 논리로 $P([0,1])$이 모든 점의 확률의 합이 아닌 이유를 설명하라. 풀이 40쪽

3

T3 귀납법과 재귀적 정의

n이 들어간 주장을 모든 자연수에서 증명할 때, 그리고 재귀식으로 정한 양이 하나로 정해짐을 보일 때 귀납법을 쓴다. 1회의 곱의 법칙, 포함배제의 귀납 증명, Pascal 재귀의 유일성이 이 절의 도구다.

3.1 정렬원리와 귀납법

자연수 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$의 다음 성질을 공리로 받아들인다.

정의 3.1 (정렬원리) $\mathbb{N}$의 공집합이 아닌 부분집합은 가장 작은 원소를 갖는다.

정리 3.2 (수학적 귀납법) 명제 $P(n)$에 대해 (i) $P(1)$이 참이고 (ii) 모든 $n \geq 1$에서 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$이면, 모든 $n \in \mathbb{N}$에서 $P(n)$이 참이다.

증명. **전략** 거짓인 n이 있다고 가정하고, 그 가운데 가장 작은 것을 잡아 모순을 끌어낸다.

① $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n)$이 거짓$\}$이 공집합이 아니라고 가정한다. — 귀류 가정 [T2]

② S의 가장 작은 원소 m이 있다. — 정렬원리

③ (i)로 $1 \notin S$이므로 $m \geq 2$이고, $m - 1 \in \mathbb{N}$이다. — (i)

④ $m - 1 < m$이고 m이 S의 최소이므로 $m - 1 \notin S$, 곧 $P(m-1)$이 참이다. — ②

⑤ (ii)로 $P(m)$이 참이다. 이것은 $m \in S$와 모순이다. — (ii)

∎

시작점은 1이 아니어도 된다. $P(n_0)$과 $n \geq n_0$에서의 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$을 보이면 $n \geq n_0$인 모든 n에서 성립한다. 귀납 단계에서 $P(1), \dots, P(n)$을 모두 가정해도 된다. 이것을 **강한 귀납법**이라 하고, 증명은 위와 같다(④에서 m보다 작은 모든 수가 S 밖에 있다).

예제 3.3 (Bernoulli 부등식) $x \geq -1$이면 모든 $n \geq 1$에서 $(1+x)^n \geq 1+nx$이다.

전략 $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$에 귀납 가정을 넣는다. $1+x \geq 0$이어야 부등식에 곱할 수 있다.

① $n=1$이면 양변이 $1+x$로 같다. 기저

② $(1+x)^n \geq 1+nx$라 하자. $1+x \geq 0$이므로 양변에 곱해도 부등호가 유지된다.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) && \text{귀납 가정, } x \geq -1\\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x && nx^2 \geq 0\end{aligned}$$

조건 $x \geq -1$은 ②의 첫 부등호에서만 쓰였고, 빼면 결론이 깨진다. $x=-3$, $n=5$이면 왼쪽은 $(-2)^5 = -32$, 오른쪽은 $1-15=-14$이다.

예제 3.4 (하키 스틱 항등식) $0 \leq m \leq n$이면 $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$이다. m을 고정하고 n에 대한 귀납법을 쓴다. $n=m$이면 양변이 1이다. n에서 성립하면

$$\sum_{k=m}^{n+1}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+2}{m+1}. \qquad \text{귀납 가정, Pascal 항등식}$$

마지막 등호가 1회 정리 1.5의 Pascal 항등식이다. 이항계수의 항등식은 대부분 이처럼 Pascal 항등식 한 번으로 귀납 단계가 끝난다.

예제 3.5 (소인수의 존재 (강한 귀납)) $n \geq 2$인 정수는 소수들의 곱이다. $n=2$는 소수다. $2, \dots, n$이 모두 소수들의 곱이라 하고 $n+1$을 보자. $n+1$이 소수이면 끝이다. 아니면 $n+1 = ab$, $2 \leq a, b \leq n$이고, 강한 귀납 가정으로 a와 b가 소수들의 곱이므로 $n+1$도 그렇다. 바로 앞의 n만 가정해서는 a, b에 대해 아무것도 말할 수 없으므로 강한 귀납법이 필요하다.

3.2 재귀적 정의와 유일성

a_1, a_2와 "a_n을 a_{n-1}, a_{n-2}로 쓰는 식"을 주면 수열이 정해진다. 정해진다는 것은 두 가지다. 그런 수열이 **있고**, 두 개가 **없다**. 있다는 것은 식대로 계산해 나가면 되고, 하나뿐이라는 것은 두 해의 차가 0임을 귀납법으로 보인다. 1회 정리 5.13(Pascal의 재귀)의 유일성 단계가 이 구조이고, 거기서는 귀납의 기준이 $a+b$였다.

예제 3.6 (연속한 1이 없는 이진 문자열) 길이 n인 $0\cdot1$ 문자열 가운데 1이 연속해 나오지 않는 것의 수를 a_n이라 하자. 마지막 글자가 0이면 앞의 $n-1$글자는 아무 그런 문자열이고, 1이면 그 앞은 0이어야 하므로 앞의 $n-2$글자가 아무 그런 문자열이다. 따라서

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \ge 3), \qquad a_1 = 2,\quad a_2 = 3.$$

Fibonacci 수 $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$에 대해 $a_n = F_{n+2}$이다. $n = 1, 2$에서 $2 = F_3$, $3 = F_4$이고, 두 수열이 같은 재귀식을 따르므로 n에 대한 강한 귀납법으로 모든 n에서 같다. 작은 경우를 열거하면 $a_1, \dots, a_8 = 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$이다.

흔한 실수 (1) **기저를 빠뜨린다.** "$n^2 + n$은 홀수다"는 귀납 단계가 성립한다. $n^2 + n$이 홀수이면 $(n+1)^2 + (n+1) = (n^2 + n) + 2(n+1)$도 홀수다. 그러나 $n = 1$에서 2이므로 기저가 거짓이고, 실제로 $n^2 + n = n(n+1)$은 언제나 짝수다. (2) **귀납 단계가 작은 n에서 깨진다.** "말 n마리는 모두 같은 색이다"의 잘못된 증명은 $n+1$마리를 처음 n마리와 마지막 n마리로 나눠 각각 같은 색이라 하고, 두 묶음이 겹치므로 전체가 같은 색이라 한다. $n = 1$에서 $n + 1 = 2$이면 두 묶음 $\{1\}$과 $\{2\}$는 겹치지 않는다. 귀납 단계는 **모든** $n \ge n_0$에서 성립해야 한다.

연습문제

연습 3.1 (제곱의 합 ★) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 귀납법으로 보여라. 풀이 40쪽

연습 3.2 (계승의 합 ★) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$을 보여라. 풀이 40쪽

연습 3.3 (기저가 1이 아닌 귀납 ★) $n \ge 5$이면 $2^n > n^2$임을 보여라. $n = 2, 3, 4$에서는 왜 성립하지 않는가? 풀이 40쪽

연습 3.4 (유한 Boole 부등식 ★★) $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$만 써서 $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$를 귀납법으로 보여라. 풀이 40쪽

연습 3.5 (Weierstrass의 곱 부등식 ★★) $p_1, \dots, p_n \in [0,1]$이면 $\prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) \ge 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i$임을 보여라. 독립인 사건 A_i가 $P(A_i) = p_i$일 때 이 부등식은 어떤 확률에 대한 무엇이 되는가? 풀이 41쪽

연습 3.6 (우표 문제 (강한 귀납) ★★) 4원짜리와 5원짜리 우표로 12원 이상의 모든 금액을 만들 수 있음을 강한 귀납법으로 보여라. 만들 수 없는 금액을 모두 구하라. 풀이 41쪽

연습 3.7 (Fibonacci 수 ★★) $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$에 대해 (a) $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$, (b) $F_n < (7/4)^n$을 보여라. 풀이 41쪽

연습 3.8 (잘못된 귀납 찾기 ★★) 다음 "증명"의 오류를 찾아라. **주장: 음이 아닌 모든 정수 n에서 $5n = 0$이다. 증명: $n = 0$이면 맞다. $0, 1, \dots, n$에서 맞다고 하자. $n+1 = a + b$인 $a, b \le n$을 잡으면 $5(n+1) = 5a + 5b = 0 + 0 = 0$이다.** 풀이 41쪽

연습 3.9 (교란순열의 재귀 ★★★) $1, \dots, n$의 순열 가운데 어느 i도 제자리에 있지 않은 것의 수를 D_n이라 하자. (a) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ $(n \ge 3)$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$임을 보여라. (b) $D_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$이 이 재귀와 처음 두 값을 만족함을 보이고, 유일성으로 공식을 증명하라. (1회의 Montmort 문제를 포함배제 없이 푼 것이다.) 풀이 41쪽

4

T4 부등식과 볼록성

확률의 한계(Markov, Chebyshev), 추정량의 오차, 극한의 증명은 대부분 부등식을 잇는 일이다. 2회의 Markov·Chebyshev·Jensen 부등식, 3회의 Cauchy–Schwarz 부등식이 이 절의 도구를 확률변수에 옮긴 것이다.

4.1 더하고 빼기와 삼각부등식

보조정리 4.1 (삼각부등식) 실수 a, b에 대해 $|a+b| \le |a| + |b|$이고 $||a| - |b|| \le |a-b|$이다.

증명. **전략** $-|a| \le a \le |a|$를 두 수에 대해 더한다. 둘째 식은 첫 식을 $a = (a-b)+b$에 쓴다.

① $-|a| \le a \le |a|$, $-|b| \le b \le |b|$를 더하면 $-(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|$이다. 절댓값의 정의

② 따라서 $|a+b| \le |a| + |b|$이다. $|y| \le c \iff -c \le y \le c$

③ $|a| = |(a-b)+b| \le |a-b|+|b|$이므로 $|a|-|b| \le |a-b|$이다. a와 b를 바꾸면 $|b|-|a| \le |a-b|$이다. ②

■

두 양의 차를 다룰 때, 사이에 중간 항을 **더하고 빼서** 차를 둘로 쪼갠 뒤 삼각부등식을 쓴다. 이것을 **더하고 빼기**(add and subtract)라 한다.

예제 4.2 (곱의 차) $|a_nb_n - ab|$를 $|a_n - a|$와 $|b_n - b|$로 누른다. a_nb를 더하고 빼면

$$|a_nb_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \le |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|.$$ 더하고 빼기, 삼각부등식

$|a_n|$이 유계이면 오른쪽의 두 항이 각각 작아진다. 수열의 곱의 극한(정리 5.3)과 Slutsky형 논증이 모두 이 한 줄에서 출발한다.

4.2 Cauchy–Schwarz 부등식

정리 4.3 (Cauchy–Schwarz (합)) 실수 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$에 대해

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big).$$

등호는 한 벡터가 다른 벡터의 상수배일 때와 그때뿐이다.

증명. **전략** 음이 아닌 이차식 $q(t) = \sum_i (a_i t - b_i)^2$의 판별식이 양수일 수 없다.

① $\sum a_i^2 = 0$이면 모든 $a_i = 0$이므로 양변이 0이다. 이제 $A = \sum a_i^2 > 0$이라 하자. 경우 나누기

② 모든 실수 t에서

$$0 \le q(t) = \sum_i (a_i t - b_i)^2 = At^2 - 2Bt + C, \qquad B = \sum a_i b_i,\ C = \sum b_i^2.$$

제곱의 합은 음이 아니다

③ q가 실근을 둘 갖지 않으므로 판별식은 $4B^2 - 4AC \le 0$, 곧 $B^2 \le AC$이다. 이차식의 판별식

④ 등호이면 판별식이 0이므로 $q(t_0) = 0$인 t_0이 있고, 모든 i에서 $b_i = t_0 a_i$이다. 거꾸로 $b_i = ta_i$이면 양변이 t^2A^2으로 같다. ②

■

같은 증명이 $q(t) = E(tX - Y)^2$에 대해 $(EXY)^2 \le EX^2\,EY^2$을 준다(3회). 증명에서 쓴 것은 "제곱의 평균은 음이 아니다" 뿐이기 때문이다.

4.3 볼록성과 Jensen 부등식

정의 4.4 (볼록함수) 구간 I 위의 함수 φ가 모든 $x, y \in I$와 $\lambda \in [0,1]$에서

$$\varphi\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$$

를 만족하면 φ를 **볼록**(convex)하다고 한다. $-\varphi$가 볼록하면 φ를 **오목**(concave)하다고 한다.

보조정리 4.5 (이계도함수 판정) φ가 I에서 두 번 미분가능하고 $\varphi'' \ge 0$이면 φ는 볼록하다.

증명. **전략** $z = \lambda x + (1-\lambda)y$에서 접선이 그래프 아래에 있음을 보이고, 두 점에서의 부등식을 λ, $1-\lambda$로 섞는다.

① Taylor 정리(Lagrange 나머지항)로, x와 z 사이의 어떤 ξ에 대해

$$\varphi(x) = \varphi(z) + \varphi'(z)(x-z) + \tfrac{1}{2}\varphi''(\xi)(x-z)^2 \;\ge\; \varphi(z) + \varphi'(z)(x-z).$$

Taylor [T8], $\varphi'' \ge 0$

② 같은 이유로 $\varphi(y) \ge \varphi(z) + \varphi'(z)(y-z)$이다. ①

③ ①에 λ, ②에 $1-\lambda$를 곱해 더하면, $\lambda(x-z)+(1-\lambda)(y-z) = 0$이므로 $\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y) \ge \varphi(z)$이다. z의 정의

■

정리 4.6 (유한 Jensen 부등식) φ가 I에서 볼록하고 $x_1, \dots, x_n \in I$, $\lambda_i \ge 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$이면

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i).$$

증명. **전략** n에 대한 귀납법. 마지막 점을 떼어 내고 나머지를 하나의 점으로 묶으면 두 점의 경우가 된다.

① $n = 1$은 자명하고 $n = 2$는 볼록성의 정의다. 기저 [T3]

② n에서 성립한다고 하자. $\lambda_{n+1} = 1$이면 자명하므로 $\lambda_{n+1} < 1$이라 하고 $s = 1-\lambda_{n+1} = \sum_{i\le n}\lambda_i$, $y = \sum_{i\le n}(\lambda_i/s)x_i$로 둔다. y는 $x_1, \dots, x_n$의 가중평균이므로 I에 속한다. 구성

③ 두 점 y, x_{n+1}에 볼록성을 쓰고, y에 귀납 가정을 쓴다.

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\Big) = \varphi\big(sy + \lambda_{n+1}x_{n+1}\big) \le s\,\varphi(y) + \lambda_{n+1}\varphi(x_{n+1}) \qquad \text{볼록성}$$

$$\le s\sum_{i\le n}\frac{\lambda_i}{s}\varphi(x_i) + \lambda_{n+1}\varphi(x_{n+1}) \qquad \text{귀납 가정}$$

마지막 줄이 $\sum_{i\le n+1}\lambda_i\varphi(x_i)$이다.

■

따름정리 4.7 (산술–기하 평균) $x_1,\dots,x_n>0$이면 $(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\le\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$이다.

증명. $\varphi(x)=-\log x$는 $\varphi''(x)=1/x^2>0$이므로 볼록하다(보조정리 4.5). 정리 4.6을 $\lambda_i=\frac{1}{n}$으로 쓰면 $-\log\big(\frac{1}{n}\sum x_i\big)\le-\frac{1}{n}\sum\log x_i=-\log(x_1\cdots x_n)^{1/n}$이고, $\log$가 증가하므로 결론이 나온다. ■

4.4 지수와 로그의 부등식

보조정리 4.8 ($1+x\le e^x$) 모든 실수 x에서 $1+x\le e^x$이고, $x>0$에서 $\log x\le x-1$이다. 두 등호는 각각 $x=0$, $x=1$에서만 성립한다.

증명. $g(x)=e^x-1-x$는 $g'(x)=e^x-1$이 $x<0$에서 음수, $x>0$에서 양수이므로 $x=0$에서만 최솟값 $g(0)=0$을 갖는다. 둘째 식은 첫 식에 $x-1$을 넣고 로그를 취한 것이다. ■

예제 4.9 (곱을 지수로 누르기) $p_i\in[0,1]$이면 보조정리 4.8를 $x=-p_i$에 쓰고 곱해

$$\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\le\exp\Big(-\sum_{i=1}^{n}p_i\Big).$$

1회의 생일 문제에서 $\prod_{i<n}(1-i/365)\le e^{-n(n-1)/730}$가 이 부등식이다. 반대 방향의 한계는 연습 4.8에 있다.

예제 4.10 (망원 합) $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$이므로 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$이다. 이웃한 항이 서로 지워지는 합을 **망원 합**(telescoping sum)이라 한다. $k\ge2$에서 $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\Big)=2-\frac{1}{n}<2.$$

값을 정확히 몰라도 유계임을 보일 수 있다(T5의 단조수렴).

흔한 실수 (1) 음수를 곱하거나 역수를 취하면 부등호가 뒤집힌다. $a<b$에서 $1/a>1/b$는 a,b의 부호가 같을 때만 맞다. $a=-1, b=2$이면 $1/a=-1<\frac{1}{2}=1/b$이다. (2) 제곱하려면 양변이 음이 아니어야 한다. $-3<2$이지만 $9>4$이다. (3) 산술–기하 평균은 음이 아닌 수에서만 성립한다. $x_1=x_2=-1$이면 $\sqrt{x_1x_2}=1>-1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$이다.

연습문제

연습 4.1 (인수분해로 누르기 ★) $|x-3|<1$이면 $|x^2-9|<7$임을 보여라. 풀이 42쪽

연습 4.2 (산술–기하 평균 ★) $a,b>0$이면 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$임을 보이고 등호 조건을 구하라. 풀이 42쪽

연습 4.3 (합의 제곱 ★) Cauchy–Schwarz로 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} a_i^2$을 보이고 등호 조건을 구하라. 이것을 표본평균과 표본 제곱평균의 부등식 $\bar{a}^2 \le \overline{a^2}$로 읽어라. 풀이 42쪽

연습 4.4 (망원 합 계산 ★) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$를 닫힌 꼴로 구하고 $n\to\infty$의 극한을 구하라. 풀이 42쪽

연습 4.5 (Gibbs 부등식 ★★) $p_i,q_i>0$이고 $\sum_i p_i=\sum_i q_i=1$이면 $\sum_i p_i\log(q_i/p_i)\le 0$임을 $\log x\le x-1$로 보이고, 등호 조건을 구하라. 풀이 42쪽

연습 4.6 (세 평균 ★★) $x_1,\dots,x_n>0$에 대해 (a) $\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^2\le\frac{1}{n}\sum x_i^2$을 Jensen으로 보이고, (b) 조화평균 $n/\sum(1/x_i)$가 기하평균 이하임을 따름정리 4.7으로 보여라. 풀이 42쪽

연습 4.7 ($(1+1/n)^n$은 증가한다 ★★) 수 $n+1$개 $1,\ 1+\frac{1}{n},\dots,1+\frac{1}{n}$에 산술–기하 평균을 써서 $(1+\frac{1}{n})^n\le(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$을 보여라. $1+\frac{1}{n}$ 대신 $1+\frac{x}{n}$ $(x\ge 0)$을 n개 쓰면 $(1+\frac{x}{n})^n$도 n에 대해 증가함을 보여라. 풀이 43쪽

연습 4.8 (로그의 아래 한계 ★★) $0\le x\le\frac{1}{2}$이면 $\log(1-x)\ge -x-x^2$임을 보여라. 이것으로 $i/N\le\frac{1}{2}$인 범위에서 $\prod_{i<n}(1-i/N)\ge\exp\left(-\sum_{i<n}(i/N+i^2/N^2)\right)$을 보여라. 풀이 43쪽

연습 4.9 (Minkowski 부등식 ★★) $\sqrt{\sum(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum a_i^2}+\sqrt{\sum b_i^2}$을 Cauchy–Schwarz로 보여라. 풀이 43쪽

연습 4.10 (Cauchy의 앞뒤 귀납 ★★★) Jensen 없이 산술–기하 평균을 증명한다. (a) $n=2$를 보여라. (b) $n=2^m$에서 성립하면 $n=2^{m+1}$에서 성립함을 보여라. (c) n에서 성립하면 $n-1$에서 성립함을 보여라. (힌트: $x_n=\frac{1}{n-1}(x_1+\cdots+x_{n-1})$을 덧붙인다.) (d) 모든 n에서 성립하는 이유를 설명하라. 풀이 43쪽

5

T5 ε–N, 급수, 상극한과 하극한

확률의 연속성, 가산가법성, 대수의 법칙과 중심극한정리는 모두 극한에 대한 주장이다. 이 절은 수열의 극한을 ε과 N으로 다루는 법, 급수가 수렴함을 보이는 법, 사건열의 상극한과 하극한을 정리한다. 1회의 연속성 정리가 처음 쓰는 곳이다.

5.1 수열의 극한

정의 5.1 (수열의 극한) 실수열 a_n이 a로 **수렴**한다($a_n \to a$)는 것은, 모든 $\varepsilon > 0$에 대해 어떤 N이 있어 $n \ge N$이면 $|a_n - a| < \varepsilon$이라는 것이다.

N은 ε에 따라 달라져도 되지만 n에 따라 달라지면 안 된다. 수렴을 보이는 증명은 "ε이 주어졌다고 하자"로 시작해 N을 ε의 식으로 찾아 주는 것이다. 찾는 방법은 대개 $|a_n - a|$를 n만의 간단한 식으로 위에서 누르는 것이다.

예제 5.2 (N을 찾기) $a_n = \frac{n+1}{2n+3} \to \frac{1}{2}$을 보인다. 차를 계산하면

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(2n+3)} < \frac{1}{4n}.$$

$\varepsilon > 0$이 주어지면 $N > 1/(4\varepsilon)$인 자연수 N을 잡는다(Archimedes 성질: 어떤 실수보다 큰 자연수가 있다). $n \ge N$이면 $|a_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4n} \le \frac{1}{4N} < \varepsilon$이다.

정리 5.3 (극한의 대수) $a_n \to a$, $b_n \to b$이면 $a_n + b_n \to a + b$이고 $a_n b_n \to ab$이다.

증명. **전략** 합은 삼각부등식, 곱은 더하고 빼기([T4])로 차를 둘로 쪼개고, 각 조각을 ε의 몫으로 누른다.

① $\varepsilon > 0$이 주어지면 $n \ge N_1$에서 $|a_n - a| < \varepsilon/2$, $n \ge N_2$에서 $|b_n - b| < \varepsilon/2$인 N_1, N_2가 있다. $n \ge \max(N_1, N_2)$이면 $|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$이다. 정의, 삼각부등식

② 수렴하는 수열은 유계다. $\varepsilon = 1$에 대한 N 이후로 $|a_n| < |a| + 1$이고, 그 앞은 유한개이므로 $M = \max(|a_1|, \dots, |a_N|, |a| + 1)$이 모든 $|a_n|$의 상계다. 정의에 $\varepsilon = 1$

③ 곱은 더하고 빼서

$$|a_n b_n - ab| \le |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| \le M|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|.$$ 예제 4.2, ②

$|b_n - b| < \varepsilon/(2M)$, $|a_n - a| < \varepsilon/(2|b| + 2)$이 되는 n부터 오른쪽은 ε보다 작다. ①과 같은 방법

■

실수의 성질 가운데 극한의 존재를 보장하는 것은 다음 공리다. **완비성**: 위로 유계이고 공집합이 아닌 실수 집합은 최소 상계(상한, sup)를 갖는다.

정리 5.4 (단조수렴) 증가하고 위로 유계인 수열은 수렴하고, 극한은 $\sup_n a_n$이다. 감소하고 아래로 유계인 수열은 $\inf_n a_n$으로 수렴한다.

증명. **전략** 상한 s보다 조금 작은 수는 상계가 아니므로 그보다 큰 항이 있고, 수열이 증가하므로 그 뒤의 항은 모두 s 근처에 있다.

① 완비성으로 $s = \sup_n a_n$이 있다. 완비성

② $\varepsilon > 0$이면 $s - \varepsilon$은 상계가 아니므로 $a_N > s - \varepsilon$인 N이 있다. 상한의 정의

③ $n \ge N$이면 $s - \varepsilon < a_N \le a_n \le s$이므로 $|a_n - s| < \varepsilon$이다. 증가, s는 상계

④ 감소하는 경우는 $-a_n$에 앞의 결과를 쓴다.

■

5.2 상극한과 하극한

수렴하지 않는 수열도 "끝에서의 최대·최소"는 갖는다. $s_n = \sup_{k \ge n} a_k$는 n이 커지면 상한을 취하는 범위가 줄어들므로 감소한다. 따라서 극한이 (값 $\pm\infty$를 허용하면) 언제나 존재한다.

정의 5.5 (상극한 · 하극한)

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} a_k.$$

$\liminf a_n \le \limsup a_n$이고, 두 값이 같은 유한한 수 a일 때와 그때뿐 $a_n \to a$이다. 수렴하면 $\inf_{k\ge n} a_k$와 $\sup_{k\ge n} a_k$가 모두 a의 ε 근처로 들어오고, 거꾸로 두 값이 같으면 a_n이 그 사이에 끼기 때문이다. 예를 들어 $a_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$이면 $\sup_{k\ge n} a_k$는 n 이후의 첫 짝수 k에서의 값 $1+\frac{1}{k}$이므로 $\limsup a_n = 1$이고, 같은 이유로 $\liminf a_n = -1$이다.

증명 없이 쓰는 사실 (Cauchy 판정법) 실수열 a_n이 수렴할 필요충분조건은, 모든 $\varepsilon > 0$에 대해 $m, n \ge N$이면 $|a_m - a_n| < \varepsilon$인 N이 있다는 것이다. 극한값을 모를 때 수렴을 보이는 데 쓴다. 완비성 공리에서 나오는 해석학의 표준 정리다.

5.3 급수

급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$의 값은 부분합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$의 극한이다. 항이 음이 아니면 S_n이 증가하므로, 정리 5.4로 "부분합이 유계인가"만 확인하면 된다.

정리 5.6 (기하급수) $|r| < 1$이면 $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$이고, $|r| \ge 1$이면 발산한다.

증명. **전략** 부분합의 닫힌 꼴을 구하고 $r^n \to 0$을 쓴다.

① $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k$이면 $S_n - rS_n = 1 - r^n$이므로 $S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$ $(r \ne 1)$이다. 망원 합 [T4]

② $0 < |r| < 1$이면 $1/|r| = 1 + h$, $h > 0$이고, Bernoulli 부등식으로 $(1+h)^n \ge 1 + nh$이므로 $|r|^n \le \frac{1}{1+nh} \to 0$이다. Bernoulli [T3]

③ 따라서 $S_n \to \frac{1}{1-r}$이다. $|r| \ge 1$이면 항 r^k이 0으로 가지 않으므로 발산한다. ①②, 연습 5.2

■

정리 5.7 (비교 판정과 비율 판정) (a) $0 \le a_k \le b_k$이고 $\sum b_k < \infty$이면 $\sum a_k < \infty$이다. (b) $a_k > 0$이고 어떤 $r < 1$과 K가 있어 $k \ge K$에서 $a_{k+1}/a_k \le r$이면 $\sum a_k < \infty$이다.

증명. (a) $\sum_{k\le n} a_k \le \sum_{k\le n} b_k \le \sum_k b_k$이므로 증가하는 부분합이 유계다(정리 5.4). (b) $k \ge K$에서 $a_k \le a_K r^{k-K}$이고(귀납법), 오른쪽의 합은 기하급수이므로 (a)로 수렴한다. 앞의 $K-1$개 항은 유한한 합을 더할 뿐이다. ■

예제 5.8 (조화급수와 $\sum 1/k^2$) $\sum_k 1/k^2$은 예제 4.10로 부분합이 2보다 작으므로 수렴한다. 조화급수 $\sum_k 1/k$는 발산한다. 항을 $\frac{1}{2}$, $(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})$처럼 $2^{j-1}+1$번째부터 2^j번째까지 묶으면 묶음마다 2^{j-1}개의 항이 모두 2^{-j} 이상이므로 묶음의 합은 $\frac{1}{2}$ 이상이다. 따라서 $S_{2^m} \geq 1+\frac{m}{2} \to \infty$이다. 항이 0으로 가는 것만으로는 수렴하지 않는다.

흔한 실수 부호가 섞인 급수의 항을 재배열한다. 음이 아닌 급수는 항의 순서를 바꾸거나 묶어도 값이 같다(1회의 "음이 아닌 급수의 재배열" 상자). 부호가 섞이면 그렇지 않다. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2$이지만, 같은 항을 양수 하나, 음수 둘의 순서 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$로 더하면 $\frac{1}{2}\log 2 \approx 0.3466$이다. 묶음 $\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{2(2j-1)}=\frac{1}{2(2j-1)}$을 먼저 계산하면 이 급수는 원래 급수의 절반이 된다. 절댓값의 합 $\sum|a_k|$가 유한하면 순서를 바꿔도 값이 같다.

5.4 사건열의 상극한과 하극한

정의 5.9 (사건의 상극한 · 하극한) 사건열 $A_1, A_2, \ldots$에 대해

$$\limsup_{n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k, \qquad \liminf_{n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

명제 5.10 (원소로 읽기) $\omega \in \limsup_n A_n \iff \omega$가 무한히 많은 A_k에 속한다. $\omega \in \liminf_n A_n \iff$ 유한개를 빼고 모든 A_k에 속한다.

증명. **전략** 교집합은 "모든 n", 합집합은 "어떤 $k \geq n$"으로 읽는다 [T1].

① $\omega \in \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k \iff$ 모든 n에 대해 $\omega \in A_k$인 $k \geq n$이 있다. 원소 추적

② ω가 속한 A_k가 유한개이면 그 가운데 가장 큰 k_0에 대해 $n = k_0+1$에서 ①이 깨진다. 무한개이면 어떤 n에 대해서도 n 이상의 그런 k가 있다. 대우 [T2]

③ $\omega \in \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k \iff$ 어떤 n이 있어 $k \geq n$인 모든 A_k에 ω가 속한다. 이것은 "빠지는 A_k가 유한개"와 같다. 원소 추적

■

$\limsup_n A_n$을 "A_n이 무한히 자주 일어난다"(A_n i.o.)라고 읽는다. $\bigcup_{k\geq n} A_k$는 n에 대해 감소하고 $\bigcap_{k\geq n} A_k$는 증가하므로, 확률의 연속성을 쓸 수 있는 꼴이다.

예제 5.11 (e의 정의) $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$은 증가하고(연습 4.7) 이항정리로

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 3 \qquad \binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!},\ k! \ge 2^{k-1}$$

이므로 위로 유계다. 정리 5.4로 극한이 있고, 그 극한을 e로 정의한다. $e_1, e_2, e_{10}, e_{100}$은 $2,\ 2.25,\ 2.594,\ 2.705$이다.

연습문제

연습 5.1 ($N(\varepsilon)$ 구하기 ★) $\frac{3n+1}{n+2} \to 3$을 정의로 보이고, $\varepsilon = 0.01$일 때 가장 작은 N을 구하라. 풀이 43쪽

연습 5.2 (수렴하지 않음 보이기 ★) $(-1)^n$이 어떤 실수로도 수렴하지 않음을 $\varepsilon = 1$로 보여라. 또 $|r| \ge 1$이면 $r^n \not\to 0$임을 보여라. 풀이 44쪽

연습 5.3 (근호의 차 ★) $\sqrt{n^2+n} - n \to \frac{1}{2}$을 보여라. 풀이 44쪽

연습 5.4 ($\sum k/2^k$ ★) $S = \sum_{k=1}^{\infty} k/2^k$가 수렴함을 비율 판정으로 보이고, $S - \frac{1}{2}S$를 계산해 $S = 2$를 보여라. 풀이 44쪽

연습 5.5 (비교 판정 ★★) $\sum_k \frac{1}{k^2+k+1}$은 수렴하고 $\sum_k \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$은 발산함을 보여라. 풀이 44쪽

연습 5.6 (상극한 계산 ★★) $a_n = \sin(n\pi/2) + \frac{1}{n}$의 상극한과 하극한을 구하라. 풀이 44쪽

연습 5.7 (사건열의 상극한 ★★) $\Omega = [0,1]$에서 n이 홀수이면 $A_n = [0, \frac{1}{n}]$, 짝수이면 $A_n = [\frac{1}{2}, 1]$이다. $\limsup_n A_n$과 $\liminf_n A_n$을 구하라. 풀이 44쪽

연습 5.8 (상극한의 성질 ★★) 다음 세 식을 보여라.

$$\text{(a)}\ \Big(\limsup_n A_n\Big)^c = \liminf_n A_n^c, \qquad \text{(b)}\ \liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n,$$

$$\text{(c)}\ \mathbf{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbf{1}_{A_n}.$$

풀이 45쪽

연습 5.9 (비율 판정 ★★) $\sum_k k^3/3^k$과 $\sum_k k!/k^k$이 수렴함을 비율 판정으로 보여라. 풀이 45쪽

연습 5.10 (Cesàro 평균 ★★★) $a_n \to a$이면 $\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n) \to a$임을 보여라. 역은 성립하지 않음을 보여라. 풀이 45쪽

6

T6 극한과 적분의 교환

기댓값은 합이나 적분이다. 그래서 "극한의 기댓값", "무한합의 기댓값", "미분의 기댓값"을 계산하려면 극한·합·미분과 적분의 순서를 바꿔야 한다. 순서를 바꿀 수 있는 조건을 이 절에서 정리한다. 2회의 적률생성함수와 기댓값의 무한합이 처음 쓰는 곳이다.

6.1 순서를 바꿀 수 없는 경우

점마다 수렴한다는 것만으로는 적분의 극한이 극한의 적분과 같지 않다.

예제 6.1 (사라지는 질량) $f_n = n\mathbf{1}_{(0,1/n)}$이면 모든 x에서 $f_n(x) \to 0$이다. $x \le 0$이면 언제나 0이고, $x > 0$이면 $1/n < x$인 n부터 0이다. 그러나 $\int f_n = 1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n.$$

넓이 1이 점점 좁고 높은 막대로 몰려 극한에서 사라진다. $g_n = \mathbf{1}_{(n,n+1)}$은 넓이 1이 오른쪽 무한대로 빠져나가는 같은 현상이다.

예제 6.2 (순서를 바꾸면 달라지는 이중급수) $j, k \ge 1$에서 $a_{jk} = 1\,(k = j)$, $a_{jk} = -1\,(k = j+1)$, 나머지는 0이라 하자. 행 j에는 $+1$과 -1이 하나씩 있으므로 $\sum_k a_{jk} = 0$이고 $\sum_j \sum_k a_{jk} = 0$이다. 열 $k = 1$에는 $a_{11} = 1$만 있고, $k \ge 2$인 열에는 $a_{kk} = 1$과 $a_{k-1,k} = -1$이 있으므로 $\sum_k \sum_j a_{jk} = 1$이다. 이 배열에서는 $\sum_{j,k} |a_{jk}| = \infty$이다.

6.2 순서를 바꿀 수 있는 조건

다음 정리들은 측도론(Lebesgue 적분)의 정리다. 이 과정에서는 구간 위의 (이상)적분, 합, 그리고 확률변수의 기댓값에 대해 이 형태로 쓴다.

증명 없이 쓰는 사실 (단조수렴 정리) $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$이고 모든 x에서 $f_n(x) \to f(x)$이면 $\int f_n \to \int f$이다(양변이 ∞일 수 있다). 기댓값으로 쓰면 $0 \le X_n \uparrow X$이면 $EX_n \uparrow EX$이다.

증명 없이 쓰는 사실 (지배수렴 정리) 모든 x에서 $f_n(x) \to f(x)$이고, n과 무관한 함수 g가 있어 모든 n, x에서 $|f_n(x)| \le g(x)$이고 $\int g < \infty$이면 $\int f_n \to \int f$이다. 기댓값으로 쓰면 $X_n \to X$이고 $|X_n| \le Y$, $EY < \infty$이면 $EX_n \to EX$이다. g를 **지배함수**(dominating function)라 한다.

증명 없이 쓰는 사실 (Fubini–Tonelli 정리) (Tonelli) $h(x,y) \ge 0$이면 $\int\!\big(\int h\,dy\big)dx = \int\!\big(\int h\,dx\big)dy$이다(양변이 ∞일 수 있다). (Fubini) $\int\!\int |h| < \infty$이면 부호가 섞여도 두 반복적분이 같다. 적분 대신 합이 와도 같다. 2회의 "음이 아닌 함수의 적분 순서 (Tonelli)" 상자가 이 정리다.

예제 6.1에서 지배수렴 정리가 막히는 이유는 지배함수가 없기 때문이다. 모든 n의 f_n을 누르려면 $g \ge \sup_n f_n$이어야 하는데, $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$에서 $\sup_m f_m(x) = n \ge \frac{1}{x} - 1$이므로 $\int_0^1 g \ge \int_0^1 (\frac{1}{x} - 1)dx = \infty$이다. 예제 6.2는 Fubini의 조건 $\sum |a_{jk}| < \infty$가 깨진 경우다.

쓰는 순서. (1) 무엇과 무엇의 순서를 바꾸는지 적는다($\lim \int$, $\sum \int$, $\frac{d}{dt}\int$, $\int\int$). (2) 함수가 음이 아니면 단조수렴 정리나 Tonelli로 끝난다. 조건이 없다. (3) 부호가 섞이면 n(또는 t)과 무관한 지배함수 g를 찾고 $\int g < \infty$를 확인한다. (4) 미분은 다음 정리로 지배수렴의 문제로 바꾼다.

정리 6.3 (적분 기호 아래의 미분) 열린 구간 T의 모든 t에서 $\int |f(x,t)|\,dx < \infty$이고, $\partial f/\partial t$가 존재하며, t와 무관한 g가 있어 모든 x와 $t \in T$에서 $|\partial f(x,t)/\partial t| \le g(x)$, $\int g < \infty$라 하자. 그러면 T에서

$$\frac{d}{dt}\int f(x,t)\,dx = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

증명. **전략** 도함수는 차분몫의 극한이다. 차분몫을 평균값 정리로 g로 누르고 지배수렴 정리를 쓴다.

① $t \in T$를 고정하고 $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$, $t+h_n \in T$인 수열을 잡는다. $q_n(x) = \big(f(x,t+h_n) - f(x,t)\big)/h_n$로 두면 $\frac{1}{h_n}\big(\int f(x,t+h_n)dx - \int f(x,t)dx\big) = \int q_n(x)\,dx$이다. — 적분의 선형성

② 모든 x에서 $q_n(x) \to \partial f(x,t)/\partial t$이다. — 편미분의 정의

③ 평균값 정리로 $q_n(x) = \partial f(x,\xi_n)/\partial t$인 ξ_n이 t와 $t+h_n$ 사이에 있다. $\xi_n \in T$이므로 $|q_n(x)| \le g(x)$이다. — 평균값 정리, 가정

④ 지배수렴 정리로 $\int q_n \to \int \partial f/\partial t$이다. 이것이 모든 수열 $h_n \to 0$에서 성립하므로 도함수가 존재하고 오른쪽과 같다. — 지배수렴 정리

6.3 표준 예

예제 6.4 (지배수렴으로 극한 구하기) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}(1+x/n)^{-n}dx$를 구한다.

전략 점별 극한은 e^{-x}이다(예제 5.11의 e의 정의를 x/n으로 쓴 것, [T8]). 지배함수를 찾는다.

① $(1+x/n)^n$은 n에 대해 증가한다(연습 4.7와 같은 논증). 따라서 $n \ge 2$에서 $(1+x/n)^{-n} \le (1+x/2)^{-2} = g(x)$이다. — n과 무관한 상계

② $\int_0^{\infty} g = \int_0^{\infty}(1+x/2)^{-2}dx = 2 < \infty$이다. — 적분 계산

③ 지배수렴 정리로 극한은 $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$이다. — 지배수렴 정리

확인: $\int_0^{\infty}(1+x/n)^{-n}dx = \frac{n}{n-1}$이고 $n = 2, 3, 5$에서 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$이며 1로 간다.

예제 6.5 (적률생성함수의 미분) 밀도 f인 X의 $M(t)=\int e^{tx}f(x)\,dx$가 $|t|<h$에서 유한하면, $|t|<h$에서 $M'(t)=\int xe^{tx}f(x)\,dx$이다.

전략 t를 포함하는 작은 구간 $T=(-t_0,t_0)$, $t_0<h$에서 $|xe^{sx}f(x)|$를 누르는 적분 가능한 g를 찾고 정리 6.3을 쓴다.

① $t_0<t_1<h$를 잡는다. $|x|\le Ce^{(t_1-t_0)|x|}$인 상수 C가 있다($|x|e^{-(t_1-t_0)|x|}$는 유계). — 지수가 다항식보다 빠르다

② $s\in T$이면 $|xe^{sx}|\le |x|e^{t_0|x|}\le Ce^{t_1|x|}\le C(e^{t_1x}+e^{-t_1x})$이다. — ①

③ $g(x)=C(e^{t_1x}+e^{-t_1x})f(x)$이면 $\int g=C\big(M(t_1)+M(-t_1)\big)<\infty$이다. — $|t_1|<h$

④ 정리 6.3로 T에서 미분과 적분의 순서를 바꿀 수 있다. 같은 논증을 되풀이하면 $M^{(k)}(0)=EX^k$이다. — 정리 6.3

예제 6.6 (Tonelli로 합과 적분 바꾸기) $\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-k}$이다. $(0,1)$에서 $-x\log x\ge 0$이므로 $x^{-x}=e^{-x\log x}=\sum_{j\ge 0}(-x\log x)^j/j!$은 음이 아닌 항의 합이다. Tonelli로

$$\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{j\ge 0}\frac{1}{j!}\int_0^1(-x\log x)^j dx=\sum_{j\ge 0}\frac{1}{j!}\cdot\frac{j!}{(j+1)^{j+1}}=\sum_{k\ge 1}\frac{1}{k^k}\approx 1.29129.$$

가운데 적분은 $x=e^{-u}$로 치환하면 $\int_0^\infty u^j e^{-(j+1)u}du=j!/(j+1)^{j+1}$이다([T7], 부분적분과 귀납법). 항이 음이 아니어서 조건을 확인할 것이 없다.

흔한 실수 (1) 지배함수가 n에 의존한다. $|f_n|\le n$은 지배함수가 아니다. (2) 점별 수렴만 확인하고 순서를 바꾼다(예제 6.1). (3) 미분할 때 한 점 t에서만 지배함수를 찾는다. 정리 6.3의 g는 t의 근방 전체에서 $\partial f/\partial t$를 눌러야 한다. 평균값 정리의 ξ_n이 그 근방을 돌아다니기 때문이다.

연습문제

연습 6.1 (x^n의 적분 ★) $[0,1]$에서 $f_n(x)=x^n$의 $\lim_n\int_0^1 f_n$과 $\int_0^1\lim_n f_n$을 구하고, 지배수렴 정리의 지배함수를 하나 들어라. 풀이 45쪽

연습 6.2 (빠져나가는 질량 ★) $g_n=\mathbf{1}_{(n,n+1)}$에서 $\lim_n\int g_n$과 $\int\lim_n g_n$을 구하라. $\sup_n g_n$을 구해 지배함수가 없음을 보여라. 풀이 45쪽

연습 6.3 ($(1-x/n)^n$의 적분 ★★) $\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1-x/n)^n dx=1$을 지배수렴 정리로 보여라. (힌트: $f_n(x)=(1-x/n)^n\mathbf{1}_{[0,n]}(x)\le e^{-x}$, [T4].) 정확한 값 $\int_0^n(1-x/n)^n dx$와 비교하라. 풀이 45쪽

연습 6.4 ($n\sin(x/n)$ ★★) $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n\sin(x/n)\,e^{-x}dx$를 구하라. 풀이 46쪽

연습 6.5 (꼬리합의 가중합 ★★) 음이 아닌 정수값 확률변수 X에 대해 $\sum_{k\ge1}k\,P(X\ge k)=E\big[X(X+1)/2\big]$을 Tonelli로 보여라. $X\sim$ 평균 2인 Poisson이면 양변이 4임을 확인하라. ($EX=2$, $EX^2=6$을 써도 된다.) 풀이 46쪽

연습 6.6 (이중급수 ★★) 예제 6.2의 배열에서 $\sum_{j,k}|a_{jk}|=\infty$임을 확인하라. $b_{jk}=2^{-j-k}$이면 두 반복합이 같은 이유와 그 값을 구하라. 풀이 46쪽

연습 6.7 (지수분포의 적률생성함수 ★★) $f(x)=e^{-x}$ $(x>0)$이면 $M(t)=1/(1-t)$ $(t<1)$이다. $|t|\le\frac12$에서 $|\partial_t(e^{tx}e^{-x})|\le xe^{-x/2}$임을 보이고 정리 6.3로 $M'(0)=\int_0^\infty xe^{-x}dx=1$을 확인하라. 풀이 46쪽

연습 6.8 (합과 적분 ★) $\sum_{k\ge1}\int_0^1 x^k(1-x)\,dx$와 $\int_0^1\sum_{k\ge1}x^k(1-x)\,dx$를 각각 계산해 같음을 확인하고, 순서를 바꿀 수 있는 이유를 써라. 풀이 46쪽

연습 6.9 (가우스 적분과 코사인 ★★★) $I(t)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(tx)\,dx$에 대해 (a) 미분과 적분의 순서를 바꿀 수 있음을 보이고, (b) 부분적분으로 $I'(t)=-\frac{t}{2}I(t)$를 보이고, (c) $I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$([T7]) 를 써서 $I(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2/4}$를 보여라. 풀이 46쪽

7

T7 변수변환과 Jacobian

확률변수의 함수 $Y = g(X)$의 밀도, 두 확률변수의 합과 비의 분포, 정규분포의 정규화 상수는 모두 적분의 변수를 바꿔서 구한다. 1차원 치환은 미적분의 연쇄법칙에서 나오고, 다차원 치환은 Jacobian 행렬식이 넓이(부피)의 배율이 된다. 2회 4절의 단조변환과 3회의 다변량 변수변환이 이 도구를 쓴다.

7.1 1차원 치환

정리 7.1 (치환적분) φ가 $[a,b]$에서 연속미분가능하고 g가 $\varphi([a,b])$에서 연속이면

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(y)\,dy = \int_a^b g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx.$$

증명. *전략* 양변을 위끝의 함수로 보고, 미분이 같고 시작값이 같음을 보인다.

① $G(u) = \int_{\varphi(a)}^{u} g(y)\,dy$로 두면 $G' = g$이다. — 미적분의 기본정리

② $H(s) = G\big(\varphi(s)\big)$는 $H'(s) = g\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)$이다. — 연쇄법칙

③ $H(a) = 0$이므로 $H(b) = \int_a^b H'(s)\,ds$이다. 왼쪽은 증명할 식의 왼쪽, 오른쪽은 증명할 식의 오른쪽이다. — 미적분의 기본정리

■

구간의 끝 대신 집합으로 쓰면 φ가 감소할 때 끝이 뒤바뀌므로 절댓값이 붙는다. φ가 열린 구간 I에서 일대일이고 $\varphi' \neq 0$이면 $\int_{\varphi(I)} g(y)\,dy = \int_I g(\varphi(x))\,|\varphi'(x)|\,dx$이다.

명제 7.2 (단조 변환의 밀도) X의 밀도 f_X가 열린 구간 I 밖에서 0이고, φ가 I에서 일대일이며 미분가능하고 $\varphi' \neq 0$이면, $Y = \varphi(X)$의 밀도는 $\varphi(I)$ 위에서

$$f_Y(y) = f_X\big(\varphi^{-1}(y)\big)\left|\frac{d}{dy}\varphi^{-1}(y)\right|$$

이고 그 밖에서 0이다.

증명. **전략** 분포함수를 X의 사건으로 바꾸고 미분한다. 증가와 감소를 나눈다.

① φ가 증가하면 $\{Y \le y\} = \{X \le \varphi^{-1}(y)\}$이므로 $F_Y(y) = F_X(\varphi^{-1}(y))$이다. 역상 [T1]

② 미분하면 $f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))\,(\varphi^{-1})'(y)$이고, $(\varphi^{-1})' > 0$이다. 연쇄법칙

③ φ가 감소하면 $F_Y(y) = 1 - F_X(\varphi^{-1}(y))$이고 미분하면 $-(\varphi^{-1})'(y) = |(\varphi^{-1})'(y)|$가 곱해진다. $P(X = x) = 0$

■

예제 7.3 (균등분포에서 지수분포로) $X \sim \mathrm{U}(0,1)$, $Y = -\log X$이다. $\varphi(x) = -\log x$는 $(0,1)$에서 $(0,\infty)$로 가는 감소 함수이고 $\varphi^{-1}(y) = e^{-y}$, $|(\varphi^{-1})'(y)| = e^{-y}$이다. 따라서 $f_Y(y) = 1 \cdot e^{-y}$ $(y > 0)$이고 Y는 평균 1인 지수분포다. 컴퓨터가 균등난수로 지수난수를 만드는 방법이 이것이다.

7.2 다차원 치환

증명 없이 쓰는 사실 (다중적분의 치환) T가 열린 집합 $S \subset \mathbb{R}^n$에서 열린 집합 $T(S)$로 가는 일대일 연속미분가능 변환이고 야코비안 행렬식 $J_T(\mathbf{x}) = \det\left[\partial T_i / \partial x_j\right]$이 0이 아니면, $T(S)$ 위의 적분 가능한 g에 대해

$$\int_{T(S)} g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_{S} g\big(T(\mathbf{x})\big)\,|J_T(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}.$$

다변수 미적분학의 표준 정리이고, 3회 5절의 상자와 같은 문장이다.

쓸 때 확인할 것은 셋이다. (1) 변환이 일대일인가. 아니면 정의역을 나눈다. (2) 새 변수의 범위, 곧 $T(S)$가 무엇인가. (3) Jacobian을 어느 방향으로 계산했는가. $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$의 밀도를 구할 때는 $\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{y})$의 Jacobian $J_{T^{-1}}(\mathbf{y}) = 1/J_T(\mathbf{x})$를 쓴다. 자주 쓰는 Jacobian은 다음과 같다.

변환	식	$\lvert J\rvert$
선형	$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$	$\lvert\det A\rvert$
극좌표	$(x,y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$	r
합과 비	$(x,y) = (uv,\ u(1-v))$	u
구면좌표	$(r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi)$	$r^2\sin\phi$

예제 7.4 (가우스 적분) $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$이다.

전략 I^2을 평면 위의 적분으로 쓰고 극좌표로 바꾼다.

① $I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy$이다. Tonelli [T6], 피적분함수 ≥ 0

② 극좌표 $(r,\theta) \in (0,\infty)\times(0,2\pi)$는 평면에서 반직선 $\{(x,0) : x \geq 0\}$를 뺀 곳으로 가는 일대일 변환이고 $|J| = r$이다. 빠진 반직선은 넓이가 0이어서 적분에 영향이 없다. 다중적분의 치환

③ 따라서

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\Big[-e^{-r^2/2}\Big]_0^{\infty} = 2\pi. \qquad \text{Tonelli, 1차원 치환 } s = r^2/2$$

$I > 0$이므로 $I = \sqrt{2\pi}$이다.

예제 7.5 (합과 비) X, Y가 독립이고 각각 밀도 f_X, f_Y가 $(0,\infty)$ 위에 있다. $U = X+Y$, $V = X/(X+Y)$로 두면 역변환은 $x = uv$, $y = u(1-v)$이고 범위는 $u > 0$, $0 < v < 1$, $|J| = u$이다. 따라서

$$f_{U,V}(u,v) = f_X(uv)\,f_Y\big(u(1-v)\big)\,u.$$

X, Y가 독립인 평균 1의 지수분포이면 $f_{U,V}(u,v) = e^{-uv}e^{-u(1-v)}u = ue^{-u}$이다. (u,v)의 함수가 u만의 함수와 v만의 함수(상수 1)의 곱이므로 U와 V는 독립이고, $V \sim \mathrm{U}(0,1)$이다 (연습 7.4).

흔한 실수 (1) 절댓값을 빠뜨린다. 감소 변환에서 밀도가 음수로 나온다. (2) 일대일이 아닌 변환에 공식을 그대로 쓴다. $Y = X^2$에서 X의 값 $\pm\sqrt{y}$가 모두 y로 가므로 두 가지의 기여를 더해야 한다. (3) 새 변수의 범위를 빠뜨린다. 예제 7.5에서 $0 < v < 1$을 적지 않으면 V의 밀도가 1인 범위를 말할 수 없다.

연습문제

연습 7.1 (치환 연습 ★) $u = 1 - x^2$으로 치환해 $\int_0^1 x(1-x^2)^3dx$를 계산하라. 풀이 47쪽

연습 7.2 (균등분포의 변환 ★) $X \sim \mathrm{U}(0,1)$이다. (a) $Y = -2\log X$의 밀도, (b) $Z = \tan\big(\pi(X - \tfrac{1}{2})\big)$의 밀도를 구하라. 풀이 47쪽

연습 7.3 (Jacobian 계산 ★) 다음 두 변환의 Jacobian 행렬식을 계산하라.

(a) $(x,y) = \big(uv,\ u(1-v)\big)$, (b) $(x,y,z) = (r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi)$

풀이 47쪽

연습 7.4 (지수분포의 합과 비 ★★) 예제 7.5의 결과에서 U의 밀도가 ue^{-u} $(u>0)$이고 $V\sim \mathrm{U}(0,1)$이며 둘이 독립임을 보여라. 풀이 47쪽

연습 7.5 (정규분포의 극좌표 ★★) X와 Y는 독립인 표준정규분포를 따르고, $X=R\cos\Theta$, $Y=R\sin\Theta$이다. (R,Θ)의 결합밀도를 구하라. 또 R과 Θ가 독립이고 $\Theta\sim\mathrm{U}(0,2\pi)$이며, R^2의 밀도가 $\frac{1}{2}e^{-s/2}$ $(s>0)$임을 보여라. 풀이 47쪽

연습 7.6 (타원의 넓이 ★★) 선형변환 $(x,y)=(au,bv)$로 타원 $\{x^2/a^2+y^2/b^2\le 1\}$의 넓이가 πab임을 보여라. 풀이 47쪽

연습 7.7 ($\Gamma(\frac{1}{2})$ ★★) 예제 7.4에서 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$를 이끌고, $x=t^2$ 치환으로 $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt=\sqrt{\pi}$를 보여라. 풀이 48쪽

연습 7.8 (베타 적분 ★) $\int_0^1 x^3(1-x)^4dx$를 전개해서 계산하고, 공식 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$ $(a,b$는 자연수$)$과 같은지 확인하라. 풀이 48쪽

연습 7.9 (단체의 부피 ★★★) $\Delta_n=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\ x_i\ge 0,\ x_1+\cdots+x_n\le 1\}$의 부피가 $1/n!$임을 n에 대한 귀납법으로 보여라. (힌트: $x_n=t$를 고정한 단면은 $(1-t)\Delta_{n-1}$이고, 그 부피는 $(1-t)^{n-1}$ 배다.) 풀이 48쪽

8

T8 Taylor 전개와 o, O, o_p, O_p

중심극한정리, 델타 방법, 최대가능도의 점근정규성은 모두 "주된 항 + 작은 나머지"로 쓰는 근사다. 이 절은 Taylor 전개의 나머지항을 정확히 쓰는 법과, 나머지가 얼마나 작은지를 적는 기호 o, O, 그리고 확률변수에 대한 o_p, O_p를 정리한다. 7회의 극한 이론이 처음 쓰는 곳이다.

8.1 Taylor 정리

정리 8.1 (적분 나머지항) f가 a와 x를 포함하는 구간에서 $n+1$번 연속미분가능하면

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x), \qquad R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt.$$

증명. **전략** n에 대한 귀납법. 나머지항을 부분적분하면 다음 차수의 항 하나와 다음 나머지항이 나온다.

① $n=0$이면 $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$이고, 미적분의 기본정리다. 기저 [T3]

② $n-1$에서 성립한다고 하자. $R_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt$에서 $u = f^{(n)}(t)$, $dv = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$, $v = -\frac{(x-t)^n}{n!}$로 부분적분한다.

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) &= \Big[-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \qquad \text{부분적분} \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \end{aligned}$$

③ 이것을 $n-1$에서의 식에 넣으면 n에서의 식이 된다. 귀납 가정

■

따름정리 8.2 (Lagrange 나머지항) 같은 조건에서 a와 x 사이의 어떤 ξ에 대해 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$이다.

증명. **전략** 적분 나머지항의 가중치 $(x-t)^n$은 적분 구간에서 부호가 바뀌지 않는다. $f^{(n+1)}$의 최솟값과 최댓값으로 끼우고 중간값 정리를 쓴다.

① $a < x$라 하자($x < a$도 같다). $[a,x]$에서 $f^{(n+1)}$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 하면, $(x-t)^n \geq 0$이므로 $m\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq R_n(x) \leq M\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt$이다. 적분의 단조성

② $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$이다. 계산

③ $R_n(x)(n+1)!/(x-a)^{n+1}$은 $[m,M]$에 있으므로, 중간값 정리로 이 값을 $f^{(n+1)}(\xi)$로 갖는 $\xi \in [a,x]$가 있다. 중간값 정리

■

예제 8.3 ($\log(1+x)$의 2차 근사) $f(x) = \log(1+x)$는 $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(t) = 2/(1+t)^3$이다. 따름정리 8.2로

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\xi)^3}$$

인 ξ가 0과 x 사이에 있다. $x \geq 0$이면 나머지는 0과 $x^3/3$ 사이이고, $-1 < x < 0$이면 절댓값이 $|x|^3/\big(3(1-|x|)^3\big)$ 이하다. 나머지항의 부호를 알면 부등식이 나온다. $x \geq 0$에서 $x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x$이다(연습 8.5).

8.2 o와 O

정의 8.4 (o와 O) 수열 a_n, b_n에 대해 어떤 C와 N이 있어 $n \geq N$에서 $|a_n| \leq C|b_n|$이면 $a_n = O(b_n)$이라 쓴다. $a_n/b_n \to 0$이면 $a_n = o(b_n)$이라 쓴다. $x \to 0$일 때의 함수에 대해서도 같은 뜻으로 쓴다. $O(1)$은 유계, $o(1)$은 0으로 가는 양이다.

여기서 "="는 한 방향으로만 읽는다. $a_n = O(b_n)$은 "a_n은 $O(b_n)$인 양들 가운데 하나다"라는 뜻이다. 그래서 $\frac{1}{n} = O(1)$은 맞지만 $O(1) = \frac{1}{n}$이라고 쓰지 않는다. 계산 규칙은 정의에서 바로 나온다. $O(a_n) + O(b_n) = O(|a_n| + |b_n|)$, $O(a_n)O(b_n) = O(a_n b_n)$, $o(a_n)O(b_n) = o(a_n b_n)$, $o(a_n) = O(a_n)$.

Taylor 정리를 이 기호로 쓰면, $f^{(n+1)}$이 0 근처에서 유계일 때 $x \to 0$에서

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + O(x^{n+1})$$

이다. 나머지항이 $|R_n(x)| \leq \sup|f^{(n+1)}| \cdot |x|^{n+1}/(n+1)!$이기 때문이다.

예제 8.5 ($(1+x/n)^n$의 정확도) x를 고정하면

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x\left(1-\frac{x^2}{2n}+O(n^{-2})\right).$$

전략 로그를 취해 $\log(1+u)$를 전개하고, 다시 지수를 전개한다.

① $n\log(1+x/n) = n\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+O(n^{-3})\right) = x-\frac{x^2}{2n}+O(n^{-2})$. 예제 8.3, $u=x/n\to 0$

② $e^{x+w}=e^xe^w$이고 $w=-\frac{x^2}{2n}+O(n^{-2})\to 0$이므로 $e^w=1+w+O(w^2)=1-\frac{x^2}{2n}+O(n^{-2})$이다. e^w의 Taylor 전개

$x=1$, $n=100$이면 $(1.01)^{100}=2.704814$이고 $e(1-\frac{1}{200})=2.704690$이다. 차 1.2×10^{-4}는 $n^{-2}=10^{-4}$의 크기다. 이 계산에서 $(1+x/n)^n\to e^x$도 나온다.

예제 8.6 (근호의 전개) $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+O(x^3)$ $(x\to0)$이다. 이것으로

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}}-1\right)=\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+O(n^{-3})\right)=\frac{1}{2\sqrt{n}}+O(n^{-3/2}).$$

8.3 확률적 o_p와 O_p

확률변수열이 "작다"는 것은 큰 값을 가질 확률이 작다는 뜻으로 쓴다.

정의 8.7 (o_p와 O_p) 확률변수열 X_n이 모든 $\varepsilon>0$에서 $P(|X_n|>\varepsilon)\to0$을 만족하면 X_n이 0으로 **확률수렴**한다고 하고 $X_n\xrightarrow{P}0$ 또는 $X_n=o_p(1)$로 쓴다. 모든 $\varepsilon>0$에 대해 어떤 M과 N이 있어 $n\ge N$에서 $P(|X_n|>M)<\varepsilon$이면 X_n이 **확률적으로 유계**라 하고 $X_n=O_p(1)$로 쓴다. 양수열 a_n에 대해 $X_n=o_p(a_n)$은 $X_n/a_n=o_p(1)$, $X_n=O_p(a_n)$은 $X_n/a_n=O_p(1)$이라는 뜻이다.

명제 8.8 (o_p와 O_p의 대수) (a) $o_p(1)+o_p(1)=o_p(1)$. (b) $o_p(1)=O_p(1)$. (c) $O_p(1)\cdot o_p(1)=o_p(1)$.

증명. **전략** 사건을 포함관계로 쪼개고 Boole 부등식으로 확률을 더한다 [T1].

① (a) $|X_n+Y_n|>\varepsilon$이면 $|X_n|>\varepsilon/2$이거나 $|Y_n|>\varepsilon/2$이다. 따라서 $P(|X_n+Y_n|>\varepsilon)\le P(|X_n|>\frac{\varepsilon}{2})+P(|Y_n|>\frac{\varepsilon}{2})\to0$. 삼각부등식, Boole

② (b) $\varepsilon>0$이 주어지면 $M=1$로 두고, $P(|X_n|>1)\to0$이므로 $n\ge N$에서 $P(|X_n|>1)<\varepsilon$인 N이 있다. 정의

③ (c) $X_n = O_p(1)$, $Y_n = o_p(1)$이고 $\varepsilon, \eta > 0$이라 하자. $n \ge N$에서 $P(|X_n| > M) < \eta$인 M, N을 잡는다. $|X_n Y_n| > \varepsilon$이면 $|X_n| > M$이거나 $|Y_n| > \varepsilon/M$이므로

$$P(|X_n Y_n| > \varepsilon) \le P(|X_n| > M) + P(|Y_n| > \varepsilon/M) < \eta + o(1).$$

η는 임의이므로 왼쪽은 0으로 간다. Boole ■

예제 8.9 (Chebyshev로 O_p 보이기) $EX_n = 0$이고 $\operatorname{Var} X_n \le c/n$이면 $X_n = O_p(n^{-1/2})$이다. Chebyshev 부등식(2회)으로 $P(|\sqrt{n}X_n| > M) \le \frac{n \operatorname{Var} X_n}{M^2} \le \frac{c}{M^2}$이고, $M = \sqrt{c/\varepsilon}$이면 오른쪽이 ε이다. 표본평균에서 모평균을 뺀 것이 $O_p(n^{-1/2})$인 이유가 이것이다.

흔한 실수 (1) $o_p(1)$이면 기댓값도 0으로 간다고 여긴다. X_n이 확률 $\frac{1}{n}$로 n, 나머지 확률로 0이면 $P(|X_n| > \varepsilon) \le \frac{1}{n} \to 0$이지만 $EX_n = 1$이다(연습 8.8). (2) Taylor 급수가 함수와 같다고 여긴다. $f(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \ne 0)$, $f(0) = 0$은 모든 계수가 0인 Taylor 급수를 갖지만 $x \ne 0$에서 양수다. 나머지항을 확인해야 한다. (3) $o(1)/o(1)$의 값을 정한다. $\frac{1}{n}/\frac{1}{n^2} \to \infty$이고 $\frac{1}{n^2}/\frac{1}{n} \to 0$이다.

연습문제

연습 8.1 (Taylor 다항식 ★) $e^x \sin x$의 $x = 0$에서의 3차 Taylor 다항식을 구하라. 풀이 48쪽

연습 8.2 (나머지항으로 오차 누르기 ★) $|\cos x - (1 - x^2/2)| \le x^4/24$를 보이고, $x = 0.1$에서 실제 오차와 비교하라. 풀이 48쪽

연습 8.3 (o, O 판정 ★) 참·거짓을 판정하라. (a) $n^2 + 3n = O(n^2)$, (b) $\log n = o(n^{0.01})$, (c) $n \sin(1/n) = 1 + O(n^{-2})$, (d) $2^n = O(n!)$, (e) $n = O(n \log n)$, (f) $n \log n = O(n)$. 풀이 48쪽

연습 8.4 (복리의 극한 ★★) c를 고정할 때 $(1 - c/n)^n = e^{-c}\big(1 - \frac{c^2}{2n} + O(n^{-2})\big)$을 보여라. 풀이 49쪽

연습 8.5 (로그를 끼우기 ★★) $x \ge 0$이면 $x - \frac{x^2}{2} \le \log(1 + x) \le x$임을 나머지항의 부호로 보여라. 풀이 49쪽

연습 8.6 (조화수와 Euler 상수 ★★) $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$에 대해 $\gamma_n = H_n - \log n$이 감소하고 $\gamma_n > 0$임을 보여라. 따라서 γ_n은 수렴한다(극한 $\gamma \approx 0.5772$). (힌트: 감소는 $\log(1 + \frac{1}{n}) = -\log(1 - \frac{1}{n+1}) \ge \frac{1}{n+1}$에서, 양수는 $\log(1 + \frac{1}{k}) \le \frac{1}{k}$의 합에서 나온다.) 풀이 49쪽

연습 8.7 (o_p, O_p의 계산 ★★) (a) $X_n = o_p(1)$, $Y_n = O_p(1)$이면 $X_n + Y_n = O_p(1)$임을 보여라. (b) $X_n - c = o_p(1)$인 상수 c가 있으면 $X_n = O_p(1)$임을 보여라. 풀이 49쪽

연습 8.8 (확률수렴과 적률 ★★) X_n이 확률 $\frac{1}{n}$로 n, 확률 $1-\frac{1}{n}$로 0이다. $X_n = o_p(1)$, $\sqrt{n}X_n = o_p(1)$임을 보이고, EX_n과 EX_n^2을 구하라. 풀이 49쪽

연습 8.9 (델타 방법의 뼈대 ★★★) $\sqrt{n}(T_n-\theta) = O_p(1)$이고 g가 θ의 근방에서 두 번 연속미분가능하면

$$\sqrt{n}\big(g(T_n)-g(\theta)\big) = g'(\theta)\sqrt{n}(T_n-\theta) + o_p(1)$$

임을 보여라. (힌트: $T_n-\theta = O_p(n^{-1/2}) = o_p(1)$이므로 T_n이 근방 밖에 있을 확률은 0으로 간다. 근방 안에서는 Lagrange 나머지항을 쓴다.) 풀이 50쪽

A

연습문제 풀이

각 풀이의 머리에 있는 문제 ○○쪽을 누르면 문제로 돌아간다. 수치는 sympy로 같은 계산을 해서 확인했다.

T1

연습 1.1 문제 4쪽

$\omega \in (A \cup B) \setminus C \iff (\omega \in A$ 또는 $\omega \in B)$ 그리고 $\omega \notin C \iff (\omega \in A, \omega \notin C)$ 또는 $(\omega \in B, \omega \notin C) \iff \omega \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. 둘째 식: $\omega \in A \setminus (B \cup C) \iff \omega \in A, \omega \notin B, \omega \notin C \iff \omega \in A \setminus B$이고 $\omega \in A \setminus C$.

연습 1.2 문제 4쪽

(a) 양쪽 모두 "ω가 A와 B 가운데 정확히 하나에 속한다"와 같다.

(b) $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$의 네 값 $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$에서 $\mathbf{1}_{A\triangle B}$는 차례로 $0,1,1,0$이다. $(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2$도 같은 값을 갖는다. $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$이므로 전개하면 $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$이다.

(c) (b)에서 $\mathbf{1}_{A\triangle B}$는 $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$를 2로 나눈 나머지다. 이것을 되풀이하면 두 집합 $(A\triangle B)\triangle C$와 $A\triangle(B\triangle C)$의 지시함수는 모두 $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C$를 2로 나눈 나머지다. 지시함수가 같으므로 두 집합이 같다(명제 1.4(c)). 두 집합 모두 "A, B, C 가운데 홀수 개에 속하는 점"의 집합이다.

연습 1.3 문제 4쪽

$a = \mathbf{1}_A$, $b = \mathbf{1}_B$, $c = \mathbf{1}_C$로 쓰면

$$1 - (1-a)(1-b)(1-c) = a + b + c - ab - ac - bc + abc,$$

곧 $\mathbf{1}_{A\cup B\cup C} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_{AB} - \mathbf{1}_{AC} - \mathbf{1}_{BC} + \mathbf{1}_{ABC}$이다. ω가 A와 B에만 속하면 $a = b = 1$, $c = 0$이므로 오른쪽은 $1 + 1 - 1 = 1$이다.

연습 1.4 문제 4쪽

(i)⇒(ii): $\omega \in A \cap B^c$이면 $\omega \in A \subset B$이면서 $\omega \notin B$이므로 그런 ω는 없다. (ii)⇒(iii): $B \subset A \cup B$는 늘 성립한다. $\omega \in A$이면 (ii)로 $\omega \notin B^c$, 곧 $\omega \in B$이므로 $A \cup B \subset B$이다. (iii)⇒(iv): $A \subset A \cup B = B$이므로 $A \cap B = A$. (iv)⇒(i): $A = A \cap B \subset B$. $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$는 ω가 두 집합에 모두 속할 때만 2이고 그 밖에는 1 이하다. 따라서 $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B \le 1 \iff$ 두 집합에 모두 속하는 점이 없다 $\iff A \cap B = \varnothing$.

연습 1.5 문제 4쪽

$X^{-1}(\{0\}) = \{3, 6, 9, 12\}$, $X^{-1}(\{1, 2\}) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$이다. X의 값은 $0, 1, 2$뿐이므로 $X^{-1}([0.5, \infty)) = X^{-1}(\{1, 2\})$이다. $\{1, 2\}$는 값의 집합 $\{0, 1, 2\}$에서 $\{0\}$의 여집합이므로, 명제 1.6로 $X^{-1}(\{1, 2\}) = X^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = (X^{-1}(\{0\}))^c$이고 실제로 원소가 일치한다.

연습 1.6 문제 4쪽

(a) $s \in f(A \cup B) \iff s = f(\omega)$인 $\omega \in A \cup B$가 있다 $\iff s \in f(A)$ 또는 $s \in f(B)$. (b) $s = f(\omega)$, $\omega \in A \cap B$이면 $s \in f(A)$이고 $s \in f(B)$이다. (c) f가 일대일이고 $s \in f(A) \cap f(B)$이면 $s = f(a) = f(b)$인 $a \in A$, $b \in B$가 있고 $a = b \in A \cap B$이므로 $s \in f(A \cap B)$이다. 일대일이 아니면 $f(\omega_1) = f(\omega_2)$, $\omega_1 \neq \omega_2$인 점이 있고, $A = \{\omega_1\}$, $B = \{\omega_2\}$에서 $f(A \cap B) = \varnothing \neq f(A) \cap f(B)$이다 (대우, [T2]).

연습 1.7 문제 4쪽

$\sup_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$는 값이 $\{0, 1\}$인 수들의 상한이므로, 어떤 i에서 $\mathbf{1}_{A_i}(\omega) = 1$이면 1이고 아니면 0이다. 앞의 경우가 $\omega \in \bigcup_i A_i$이다. 하한은 모든 i에서 1일 때만 1이고, 이것이 $\omega \in \bigcap_i A_i$이다.

연습 1.8 문제 4쪽

$\Omega = X^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{G}$이다. $G = X^{-1}(B) \in \mathcal{G}$이면 $G^c = X^{-1}(B^c) \in \mathcal{G}$이다. $G_i = X^{-1}(B_i)$이면 $\bigcup_i G_i = X^{-1}(\bigcup_i B_i) \in \mathcal{G}$이다. 세 단계 모두 명제 1.6이다.

연습 1.9 문제 4쪽

$\mathcal{S}$를 "어떤 함수 $h : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$에 대해 $\mathbf{1}_S(\omega) = h(\mathbf{1}_A(\omega), \mathbf{1}_B(\omega), \mathbf{1}_C(\omega))$인 집합 S"의 모임이라 하자. $A, B, C \in \mathcal{S}$이다(h는 좌표 하나). $S, T \in \mathcal{S}$이면 $\mathbf{1}_{S^c} = 1 - h_S$, $\mathbf{1}_{S \cup T} = \max(h_S, h_T)$, $\mathbf{1}_{S \cap T} = \min(h_S, h_T)$도 $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_C)$의 함수이므로 $\mathcal{S}$는 세 연산에 닫혀 있다. 연산 횟수에 대한 귀납법([T3])으로 만든 집합은 모두 $\mathcal{S}$에 속한다. $S \in \mathcal{S}$이면 $\omega \in S \iff h(e) = 1$, $e = (\mathbf{1}_A(\omega), \mathbf{1}_B(\omega), \mathbf{1}_C(\omega))$이다. e가 정해지면 ω는 원자 $A^{\pm} B^{\pm} C^{\pm}$ 가운데 정확히 하나에 속하므로, S는 $h(e) = 1$인 e에 대응하는 원자들의 합집합이다. h는 $2^8 = 256$가지이므로 그런 집합도 많아야 256개다.

T2

연습 2.1 문제 8쪽

대우 "$3 \nmid n$이면 $3 \nmid n^2$"을 보인다. $n = 3k+1$이면 $n^2 = 3(3k^2+2k)+1$, $n = 3k+2$이면 $n^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$이다. 어느 경우든 나머지가 1이다.

연습 2.2 문제 8쪽

(a) 어떤 $\varepsilon > 0$이 있어, 모든 N에 대해 $|a_n| \geq \varepsilon$인 $n \geq N$이 있다. (b) $x < y$이면서 $F(x) > F(y)$인 x, y가 있다. (c) 상호 독립은 네 등식 $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$, $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$이 모두 성립한다는 것이다. 부정은 이 가운데 적어도 하나가 성립하지 않는다는 것이다.

연습 2.3 문제 8쪽

$\sqrt{3} = a/b$, a, b는 공약수가 1뿐인 양의 정수라 하자. $a^2 = 3b^2$이므로 $3 \mid a^2$이고, 연습 2.1으로 $3 \mid a$이다. $a = 3c$를 넣으면 $b^2 = 3c^2$이므로 같은 이유로 $3 \mid b$이다. 공약수 3이 생기므로 모순이다.

연습 2.4 문제 8쪽

$\log_2 3 > 0$이다. $\log_2 3 = a/b$인 양의 정수 a, b가 있으면 $2^{a/b} = 3$이므로 $2^a = 3^b$이다. 왼쪽은 짝수($a \geq 1$)이고 오른쪽은 홀수이므로 모순이다.

연습 2.5 문제 8쪽

De Morgan과 Boole 부등식으로

$$P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) = 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq 1 - \sum_i P(A_i) > 0.$$

$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$이면 왼쪽은 $P(\varnothing) = 0$이므로 모순이다. 대우로 읽으면, 합집합이 Ω이면 $1 = P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$이다. 대우 쪽이 Boole 부등식 한 줄이어서 더 짧다.

연습 2.6 문제 8쪽

(a) 공정한 동전을 두 번 던지고 $A = C = \{$첫째가 앞면$\}$, $B = \{$둘째가 앞면$\}$이라 하자. A와 B, B와 C는 독립이다. 그러나 $P(A \cap C) = P(A) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = P(A)P(C)$이다. (b) $\Omega = \{1,2,3\}$ 위의 균등 확률에서 $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{2\}$로 두면 $P(A \mid B) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, $P(B \mid C) = 1 > \frac{2}{3}$, $P(A \mid C) = 0 < \frac{1}{3}$이다. 양의 연관은 이어지지 않는다.

연습 2.7 문제 8쪽

3은 $4k+3$ 꼴이므로 그런 소수가 있다. 그런 소수가 $p_1, \dots, p_m$ 뿐이라 하고 $N = 4p_1 \cdots p_m - 1$로 두자. $N \geq 11$이고 홀수이며 $N \equiv 3 \pmod 4$이다. N의 소인수는 모두 홀수다. 모두 $4k+1$ 꼴이면 $(4a+1)(4b+1) = 4(4ab+a+b)+1$을 되풀이해 $N \equiv 1 \pmod 4$가 되므로, $4k+3$ 꼴인 소인수 q가 있다. 가정으로 q는 어떤 p_i이므로 $q \mid 4p_1 \cdots p_m$이고 $q \mid N$이어서 $q \mid 1$이다. 모순이다.

연습 2.8 문제 8쪽

(a) $P(\{x\}) = c > 0$이 모든 $x \in [0,1]$에서 성립한다고 하자. $n > 1/c$인 n과 서로 다른 점 $x_1, \dots, x_n$을 고르면 유한가법성으로 $P(\{x_1, \dots, x_n\}) = nc > 1$이므로 모순이다. (b) $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$로 늘어놓을 수 있으므로 가산가법성으로 $P(\mathbb{Q}) = \sum_i P(\{q_i\}) = 0$이다. $[0,1]$은 셀 수 없으므로 점들로 나눈 분할에 가산가법성을 쓸 수 없다. 공리는 셀 수 있는 합만 허락한다. 그래서 U(0,1)처럼 모든 점의 확률이 0이면서 $P([0,1]) = 1$인 확률이 모순 없이 있다.

T3

연습 3.1 문제 11쪽

$n = 1$이면 양변이 1이다. n에서 성립하면

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\bigl(2n^2+7n+6\bigr)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

연습 3.2 문제 11쪽

$n = 1$이면 $1 = 2! - 1$이다. n에서 성립하면 $(n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$이다.

연습 3.3 문제 11쪽

$n = 5$이면 $32 > 25$이다. $n \geq 5$에서 $2^n > n^2$이면 $2^{n+1} > 2n^2$이고, $2n^2 \geq (n+1)^2 \iff (n-1)^2 \geq 2$는 $n \geq 3$에서 참이다. $n = 2, 3, 4$에서는 $4 = 4$, $8 < 9$, $16 = 16$으로 기저가 거짓이다. 귀납 단계는 $n \geq 3$에서 성립하지만 처음으로 참인 기저가 $n = 5$이다.

연습 3.4 문제 11쪽

$n = 1$은 등호다. n에서 성립하고 $B = A_1 \cup \cdots \cup A_n$이면

$$P(B \cup A_{n+1}) \leq P(B) + P(A_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}).$$

연습 3.5 문제 11쪽

$n=1$은 등호다. n에서 성립하고 $s=\sum_{i\le n}p_i$이면, $1-p_{n+1}\ge 0$을 귀납 가정에 곱해

$$\prod_{i\le n+1}(1-p_i)\ge (1-p_{n+1})(1-s)=1-s-p_{n+1}+p_{n+1}s\ge 1-\sum_{i\le n+1}p_i.$$

($1-s$가 음수여도 곱셈 단계는 맞다. 곱하는 수 $1-p_{n+1}$이 음이 아니기 때문이다.) 확률로 읽으면 $P(\text{아무것도 일어나지 않는다})\ge 1-\sum P(A_i)$, 곧 $P(\text{적어도 하나})\le\sum P(A_i)$이다. 독립인 사건에 대한 Boole 부등식이다.

연습 3.6 문제 11쪽

기저: $12=4+4+4$, $13=4+4+5$, $14=4+5+5$, $15=5+5+5$. $n\ge 16$이고 $12,\dots,n-1$을 모두 만들 수 있으면 $n-4\ge 12$를 만들고 4원을 하나 더한다. 네 개의 기저가 필요한 것은 귀납 단계가 4만큼 뒤를 보기 때문이다. 만들 수 없는 금액은 $1,2,3,6,7,11$이다(작은 경우를 모두 확인).

연습 3.7 문제 12쪽

(a) $n=1$이면 $1=F_3-1$이다. $\sum_{k\le n+1}F_k=F_{n+2}-1+F_{n+1}=F_{n+3}-1$. (b) $F_1=1<\frac{7}{4}$, $F_2=1<\frac{49}{16}$이다. $n\ge 3$이고 앞의 두 값에서 성립하면

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}<\left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{7}{4}+1\right)=\left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\frac{44}{16}<\left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\frac{49}{16}=\left(\frac{7}{4}\right)^{n}.$$

연습 3.8 문제 12쪽

$n=0$에서 $n+1=1$로 갈 때 $1=a+b$, $a,b\le 0$인 음이 아닌 정수가 없다. 귀납 단계가 $0\Rightarrow 1$에서 깨진다. $1=0+1$로 쓰면 $b=1$이 귀납 가정의 범위($\le n=0$) 밖이다. 이 논증은 $n+1\ge 2$에서만 작동하므로 기저 $n=1$이 필요한데, $5\cdot 1\ne 0$이다.

연습 3.9 문제 12쪽

(a) 교란순열 σ에서 $\sigma(n)=j$라 하자($j\ne n$, $n-1$가지). $\sigma(k)=n$인 k를 본다. **$k=j$인 경우:** σ는 n과 j를 맞바꾸고, 나머지 $n-2$개 위에서 교란순열이다. D_{n-2}가지다. **$k\ne j$인 경우:** $\{1,\dots,n-1\}$ 위의 τ를 $\tau(k)=j$, 나머지는 $\tau(i)=\sigma(i)$로 정하면 τ는 순열이고 $\tau(k)=j\ne k$이므로 교란순열이다. 거꾸로 교란순열 τ와 j가 주어지면 $k=\tau^{-1}(j)\ne j$로 σ를 되살릴 수 있으므로 일대일 대응이다. D_{n-1}가지다. j마다 $D_{n-1}+D_{n-2}$가지이므로 $D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$이다. $D_1=0$, $D_2=1$은 직접 센다. (b) $E_n=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$이면 $E_n=nE_{n-1}+(-1)^n$이다(마지막 항이 $n!\cdot(-1)^n/n!$). $E_1=0$, $E_2=1$이다. $(n-1)E_{n-2}=E_{n-1}-(-1)^{n-1}$이므로

$$(n-1)(E_{n-1}+E_{n-2})=(n-1)E_{n-1}+E_{n-1}+(-1)^n=nE_{n-1}+(-1)^n=E_n.$$

D_n과 E_n은 같은 재귀와 같은 처음 두 값을 가지므로 강한 귀납법으로 모든 n에서 같다. 처음 값들은 $0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854$이다. $D_n/n!$이 Montmort 문제에서 하나도 맞지 않을 확률이다.

T4

연습 4.1 문제 17쪽

$|x^2-9| = |x-3|\,|x+3|$이다. $|x-3|<1$이면 $2<x<4$이므로 $|x+3|<7$이고, $|x^2-9|<1\cdot 7$이다.

연습 4.2 문제 17쪽

$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) = 2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$이고, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2 = \frac{(a-b)^2}{ab} \ge 0$이므로 4 이상이다. 등호는 $a=b$일 때만이다.

연습 4.3 문제 17쪽

$b_i = 1$로 두면 $(\sum a_i)^2 \le (\sum a_i^2)\cdot n$이다. 등호는 (a_i)가 $(1,\dots,1)$의 상수배, 곧 모든 a_i가 같을 때다. 양변을 n^2으로 나누면 $\bar a^2 \le \overline{a^2}$이고, 차 $\overline{a^2}-\bar a^2$이 표본분산(분모 n)이다.

연습 4.4 문제 17쪽

$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\big)$이고 두 칸씩 떨어진 항이 지워지므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big) = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \to \frac{3}{4}.$$

연습 4.5 문제 17쪽

$\log x \le x-1$을 $x = q_i/p_i$에 쓰고 $p_i>0$을 곱해 더하면

$$\sum_i p_i \log\frac{q_i}{p_i} \le \sum_i p_i\Big(\frac{q_i}{p_i}-1\Big) = \sum_i q_i - \sum_i p_i = 0.$$

등호는 모든 i에서 $q_i/p_i = 1$일 때만이다(보조정리 4.8의 등호 조건).

연습 4.6 문제 17쪽

(a) $\varphi(x)=x^2$은 $\varphi''=2>0$이므로 볼록하고, 정리 4.6을 $\lambda_i=\frac{1}{n}$으로 쓴다. (b) 따름정리 4.7을 $1/x_i$에 쓰면 $(\prod 1/x_i)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum 1/x_i$이다. 양변의 역수를 취하면 $n/\sum(1/x_i) \le (\prod x_i)^{1/n}$이다.

연습 4.7 문제 17쪽

$n+1$개의 수 1과 $1+\frac{1}{n}$(n개)의 산술평균은 $\frac{1+n+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$이고 기하평균은 $(1+\frac{1}{n})^{n/(n+1)}$이다. 산술–기하 평균으로 $(1+\frac{1}{n})^{n/(n+1)} \le 1+\frac{1}{n+1}$이고, 양변을 $n+1$제곱한다. $1+\frac{x}{n}$을 쓰면 산술평균이 $\frac{1+n+x}{n+1} = 1+\frac{x}{n+1}$이므로 같은 방법으로 $(1+\frac{x}{n})^n \le (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}$이다.

연습 4.8 문제 17쪽

$h(x) = \log(1-x)+x+x^2$이면 $h(0)=0$이고

$$h'(x) = -\frac{1}{1-x}+1+2x = \frac{x(1-2x)}{1-x} \ge 0 \qquad (0 \le x \le \tfrac{1}{2})$$

이므로 $h \ge 0$이다. 곱의 로그는 로그의 합이므로 $\prod_{i<n}(1-i/N) = \exp\big(\sum_{i<n}\log(1-i/N)\big) \ge \exp\big(-\sum_{i<n}(i/N + i^2/N^2)\big)$이다. 예제 4.9의 위 한계와 함께 생일 문제의 확률을 위아래로 끼운다.

연습 4.9 문제 17쪽

Cauchy–Schwarz로

$$\sum(a_i+b_i)^2 = \sum a_i^2 + 2\sum a_i b_i + \sum b_i^2 \le \sum a_i^2 + 2\sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2} + \sum b_i^2 = \Big(\sqrt{\textstyle\sum a_i^2} + \sqrt{\textstyle\sum b_i^2}\Big)^2.$$

양변의 제곱근을 취한다(양변이 음이 아니다).

연습 4.10 문제 17쪽

(a) $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \ge 0$을 전개하면 $\sqrt{x_1x_2} \le \frac{1}{2}(x_1+x_2)$이다. (b) 2^{m+1}개를 앞뒤 절반으로 나누고 각 절반의 기하평균을 G_1, G_2, 산술평균을 A_1, A_2라 하자. 전체의 기하평균은 $\sqrt{G_1G_2} \le \frac{1}{2}(G_1+G_2) \le \frac{1}{2}(A_1+A_2)$이고 마지막 값이 전체의 산술평균이다. 첫 부등호가 (a), 둘째가 2^m에서의 가정이다. (c) $x_1, \dots, x_{n-1}$의 산술평균을 A라 하고 $x_n = A$를 덧붙이면 n개의 산술평균도 A이다. n에서의 부등식으로 $(x_1 \cdots x_{n-1}A)^{1/n} \le A$, 곧 $x_1 \cdots x_{n-1} \le A^{n-1}$이다. (d) 임의의 n에 대해 $2^m \ge n$인 m이 있다. (a)와 (b)로 2^m에서 성립하고, (c)를 $2^m - n$번 써서 n까지 내려온다.

T5

연습 5.1 문제 22쪽

$|\frac{3n+1}{n+2} - 3| = \frac{5}{n+2}$이다. $\varepsilon > 0$이면 $N > 5/\varepsilon - 2$인 N을 잡는다. $\varepsilon = 0.01$이면 $5/(n+2) < 0.01 \iff n > 498$이므로 가장 작은 N은 499다($n=498$이면 $5/500 = 0.01$로 같다).

연습 5.2 문제 22쪽

$(-1)^n \to a$라 하자. $\varepsilon = 1$에 대한 N보다 큰 짝수 n과 홀수 m에서 $|1-a| < 1$, $|-1-a| < 1$이다. 그러면 $2 = |1-(-1)| \le |1-a| + |a+1| < 2$로 모순이다. $|r| \ge 1$이면 모든 n에서 $|r^n - 0| \ge 1$이므로 $\varepsilon = 1$에 대한 N이 없다(예제 2.4의 부정).

연습 5.3 문제 22쪽

분자를 유리화하면

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \to \frac{1}{2}.$$

$\sqrt{1+1/n} \to 1$과 극한의 대수(정리 5.3, 몫도 같은 방법으로 된다)를 썼다.

연습 5.4 문제 22쪽

$a_k = k/2^k$이면 $a_{k+1}/a_k = \frac{k+1}{2k} \le \frac{3}{4}$ $(k \ge 2)$이므로 수렴한다. 수렴하는 두 급수는 항별로 뺄 수 있으므로

$$S - \tfrac{1}{2}S = \sum_{k\ge 1} \frac{k}{2^k} - \sum_{k\ge 2} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{2} + \sum_{k\ge 2} \frac{1}{2^k} = 1,$$

곧 $S = 2$이다.

연습 5.5 문제 22쪽

$\frac{1}{k^2+k+1} \le \frac{1}{k^2}$이고 $\sum 1/k^2 < \infty$(예제 5.8)이므로 수렴한다. $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \ge \frac{1}{k+1}$이고 $\sum 1/(k+1)$이 발산하므로, 정리 5.7(a)의 대우로 발산한다.

연습 5.6 문제 22쪽

$\sin(n\pi/2)$는 $n = 1,2,3,4$에서 $1, 0, -1, 0$을 되풀이한다. $k \equiv 1 \pmod 4$에서 $a_k = 1 + \frac{1}{k}$이고 다른 k에서 $a_k \le \frac{1}{k} < 1$이므로, $\sup_{k\ge n} a_k$는 n 이후 첫 $k \equiv 1$에서의 $1 + \frac{1}{k}$이고 1로 간다. $k \equiv 3 \pmod 4$에서 $a_k = -1 + \frac{1}{k}$이므로 $\inf_{k\ge n} a_k = -1$이다(달성되지는 않는다). 따라서 $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$이다.

연습 5.7 문제 22쪽

$\omega = 0$은 홀수 번째 A_n 모두에 속하므로 상극한에 속하고, 짝수 번째에는 속하지 않으므로 하극한에 속하지 않는다. $0 < \omega < \frac{1}{2}$이면 $\omega \le \frac{1}{n}$인 홀수 n만 유한개 있으므로 상극한에도 없다. $\frac{1}{2} \le \omega \le 1$이면 짝수 번째에 모두 속하므로 상극한에 속하지만, $n \ge 3$인 홀수 번째에는 속하지 않으므로 하극한에는 없다. 따라서 $\limsup A_n = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$, $\liminf A_n = \varnothing$이다.

연습 5.8 문제 22쪽

(a) De Morgan을 두 번 쓰면 $(\bigcap_n \bigcup_{k\ge n} A_k)^c = \bigcup_n (\bigcup_{k\ge n} A_k)^c = \bigcup_n \bigcap_{k\ge n} A_k^c$. (b) ω가 $k \ge n_0$인 모든 A_k에 속하면 무한히 많은 A_k에 속한다(명제 5.10). (c) $\mathbf{1}_{A_n}(\omega) \in \{0,1\}$이므로 $\sup_{k\ge n} \mathbf{1}_{A_k}(\omega) = 1$이 모든 n에서 성립하는 것은 $\mathbf{1}_{A_k}(\omega) = 1$인 k가 무한히 많을 때이고, 그때만 $\limsup_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 1$이다.

연습 5.9 문제 22쪽

$a_k = k^3/3^k$: $a_{k+1}/a_k = (1+\frac{1}{k})^3/3 \le (5/4)^3/3 = \frac{125}{192} < 1$ $(k \ge 4)$. $a_k = k!/k^k$: $a_{k+1}/a_k = \big(\frac{k}{k+1}\big)^k = (1+\frac{1}{k})^{-k} \le \frac{1}{2}$이다. Bernoulli 부등식으로 $(1+\frac{1}{k})^k \ge 2$이기 때문이다. 둘 다 정리 5.7(b)로 수렴한다.

연습 5.10 문제 22쪽

$\varepsilon > 0$이면 $k > N$에서 $|a_k - a| < \varepsilon/2$인 N이 있다. $n > N$이면

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - a\Big| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} |a_k - a| \le \frac{C_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

$C_N = \sum_{k\le N} |a_k - a|$는 n과 무관하므로 $n > 2C_N/\varepsilon$이면 ε보다 작다. 역의 반례: $a_n = (-1)^n$의 평균은 0 또는 $-1/n$이어서 0으로 가지만 a_n은 수렴하지 않는다(연습 5.2).

T6

연습 6.1 문제 26쪽

$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0$이다. 점별 극한은 $[0,1)$에서 0, $x = 1$에서 1이고 적분은 0이다. 두 값이 같다. $g = 1$이 $[0,1]$에서 지배함수이고 $\int_0^1 g = 1$이다.

연습 6.2 문제 26쪽

$\int g_n = 1$이므로 극한은 1이다. 고정한 x에서 $g_n(x) = 1$인 n은 많아야 하나이므로 $g_n(x) \to 0$이고 $\int \lim g_n = 0$이다. $\sup_n g_n$은 $(1,\infty)$에서 정수점을 뺀 곳에서 1이므로 적분이 ∞다. 모든 g_n을 누르는 g는 $g \ge \sup_n g_n$이어야 하므로 적분 가능한 지배함수가 없다.

연습 6.3 문제 26쪽

x를 고정하면 $n > x$부터 $f_n(x) = (1-x/n)^n \to e^{-x}$이다(예제 8.5의 x 자리에 $-x$). $0 \le x \le n$에서 $1 - x/n \in [0,1]$이고 $1 - y \le e^{-y}$이므로 $0 \le f_n(x) \le e^{-x}$이다. $\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$이므로 지배수렴정리로 극한은 1이다. 정확한 값은 $\int_0^n (1-x/n)^n dx = \frac{n}{n+1}$이다.

연습 6.4 문제 27쪽

$n\sin(x/n) \to x$이고 $|\sin y| \le |y|$이므로 $|n\sin(x/n)e^{-x}| \le xe^{-x}$, $\int_0^\infty xe^{-x}dx = 1$이다. 지배수렴 정리로 극한은 $\int_0^\infty xe^{-x}dx = 1$이다.

연습 6.5 문제 27쪽

모든 항이 음이 아니므로 Tonelli로 합의 순서를 바꾼다.

$$\sum_{k\ge 1} kP(X \ge k) = \sum_{k\ge 1} k \sum_{j\ge k} P(X=j) = \sum_{j\ge 1} P(X=j) \sum_{k=1}^{j} k = \sum_{j} P(X=j)\frac{j(j+1)}{2}.$$

Poisson(2)이면 오른쪽은 $\frac{1}{2}(EX^2 + EX) = \frac{1}{2}(6+2) = 4$이고, 왼쪽을 직접 더해도 4다.

연습 6.6 문제 27쪽

$|a_{jk}| = 1$인 항이 무한히 많으므로 $\sum |a_{jk}| = \infty$이고 Fubini의 조건이 깨진다. $b_{jk} = 2^{-j-k} \ge 0$이면 Tonelli로 두 반복합이 같고 값은 $(\sum_j 2^{-j})(\sum_k 2^{-k}) = 1$이다.

연습 6.7 문제 27쪽

$\partial_t(e^{tx}e^{-x}) = xe^{(t-1)x}$이고, $|t| < \frac{1}{2}$, $x > 0$이면 $t - 1 < -\frac{1}{2}$이므로 $|xe^{(t-1)x}| \le xe^{-x/2} = g(x)$, $\int_0^\infty g = 4$이다. 정리 6.3을 $T = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$에 쓰면 $M'(0) = \int_0^\infty xe^{-x}dx = 1$이다. 닫힌 꼴 $M'(t) = (1-t)^{-2}$도 $t = 0$에서 1이다.

연습 6.8 문제 27쪽

$\int_0^1 x^k(1-x)dx = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$이므로 합은 망원 합으로 $\frac{1}{2}$이다. $0 \le x < 1$에서 $\sum_{k\ge 1} x^k(1-x) = x$이므로 $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$이다. 항이 모두 음이 아니므로 Tonelli로 순서를 바꿀 수 있다.

연습 6.9 문제 27쪽

(a) $f(x,t) = e^{-x^2}\cos(tx)$이면 $|f| \le e^{-x^2}$로 적분 가능하고 $|\partial_t f| = |xe^{-x^2}\sin(tx)| \le xe^{-x^2} = g(x)$, $\int_0^\infty g = \frac{1}{2}$이다. g가 t와 무관하므로 정리 6.3을 모든 t에서 쓸 수 있다. (b) $u = \sin(tx)$, $dv = xe^{-x^2}dx$, $v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$로 부분적분하면

$$I'(t) = -\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin(tx)\,dx = -\Big(\Big[-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\sin(tx)\Big]_0^\infty + \frac{t}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(tx)\,dx\Big) = -\frac{t}{2}I(t).$$

(c) $\big(I(t)e^{t^2/4}\big)' = e^{t^2/4}\big(I'(t) + \frac{t}{2}I(t)\big) = 0$이므로 $I(t)e^{t^2/4} = I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$이다.

T7

연습 7.1 문제 30쪽

$u = 1 - x^2$이면 $du = -2x\,dx$이고 $x : 0 \to 1$일 때 $u : 1 \to 0$이므로

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3 dx = \int_1^0 u^3\Big(-\frac{du}{2}\Big) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^3 du = \frac{1}{8}.$$

연습 7.2 문제 30쪽

(a) $\varphi(x) = -2\log x$는 $(0,1)$에서 $(0,\infty)$로 가는 감소 함수이고 $\varphi^{-1}(y) = e^{-y/2}$, $|(\varphi^{-1})'(y)| = \frac{1}{2}e^{-y/2}$이므로 $f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}$ $(y > 0)$이다. (b) $\varphi(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$는 $(0,1)$에서 $\mathbb{R}$로 가는 증가 함수이고 $\varphi^{-1}(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan z$, $(\varphi^{-1})'(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$이므로 $f_Z(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$이다(Cauchy 분포).

연습 7.3 문제 30쪽

(a) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\begin{smallmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{smallmatrix}\right)$이므로 행렬식은 $-uv - u(1-v) = -u$이고 $|J| = u$이다. (b) 변수 순서 (r,θ,ϕ)로 계산하면 행렬식은 $-r^2\sin\phi$이고, 순서를 (r,ϕ,θ)로 바꾸면 부호가 바뀐다. 절댓값은 $r^2\sin\phi$ $(0 < \phi < \pi)$이다.

연습 7.4 문제 31쪽

예제 7.5에서 $f_{U,V}(u,v) = ue^{-u}$ $(u > 0,\ 0 < v < 1)$이다. 주변밀도는 $f_U(u) = \int_0^1 ue^{-u}dv = ue^{-u}$, $f_V(v) = \int_0^\infty ue^{-u}du = 1$이고, 곱이 결합밀도와 같으므로 독립이다.

연습 7.5 문제 31쪽

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$이고 극좌표의 $|J| = r$이므로

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\,re^{-r^2/2}, \qquad r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi.$$

r만의 함수 $re^{-r^2/2}$와 상수 $\frac{1}{2\pi}$의 곱이므로 독립이고, $\Theta \sim \mathrm{U}(0,2\pi)$, $f_R(r) = re^{-r^2/2}$이다. $S = R^2$은 $r > 0$에서 증가하고 $r = \sqrt{s}$, $dr/ds = \frac{1}{2\sqrt{s}}$이므로 $f_S(s) = \sqrt{s}e^{-s/2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{s}} = \frac{1}{2}e^{-s/2}$이다.

연습 7.6 문제 31쪽

$(u,v) \mapsto (au, bv)$는 단위원판을 타원으로 보내는 일대일 선형변환이고 $|J| = ab$이다. 넓이는 $\iint_{\text{원판}} ab\,du\,dv = ab\cdot\pi$이다. 단위원판의 넓이 π는 극좌표로 $\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = \pi$이다.

연습 7.7 문제 31쪽

예제 7.4에서 $x = y/\sqrt{2}$로 치환하면 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}$이고, 피적분함수가 짝함수이므로 $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$이다. $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$이면 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} x^{-1}e^{-x^2}2x\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$이다.

연습 7.8 문제 31쪽

$x^3(1-x)^4 = x^3 - 4x^4 + 6x^5 - 4x^6 + x^7$이므로 적분은 $\frac{1}{4} - \frac{4}{5} + 1 - \frac{4}{7} + \frac{1}{8} = \frac{70-224+280-160+35}{280} = \frac{1}{280}$이다. 공식에서 $a = 4$, $b = 5$이면 $\frac{3!\,4!}{8!} = \frac{144}{40320} = \frac{1}{280}$으로 같다.

연습 7.9 문제 31쪽

V_n을 Δ_n의 부피라 하자. $V_1 = 1$이다. $x_n = t \in [0,1]$에서의 단면은 $\{(x_1,\dots,x_{n-1}) : x_i \geq 0,\ \sum x_i \leq 1-t\} = (1-t)\Delta_{n-1}$이고, $(1-t)$배 확대는 Jacobian이 $(1-t)^{n-1}$인 선형변환이므로 부피는 $(1-t)^{n-1}V_{n-1}$이다. 지시함수에 Tonelli를 쓰면 부피는 단면의 부피의 적분이므로

$$V_n = V_{n-1}\int_0^1 (1-t)^{n-1}dt = \frac{V_{n-1}}{n}.$$

귀납법으로 $V_n = 1/n!$이다.

T8

연습 8.1 문제 35쪽

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$를 곱해 3차까지 모으면 $x + x^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})x^3 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$이다.

연습 8.2 문제 35쪽

$\cos$의 3차 Taylor 다항식은 $1 - x^2/2$이고(3차 계수는 0), Lagrange 나머지항은 $\frac{\cos\xi}{24}x^4$이므로 절댓값이 $x^4/24$ 이하다. $x = 0.1$이면 한계는 4.1667×10^{-6}이고 실제 오차는 $\cos 0.1 - 0.995 = 4.1653 \times 10^{-6}$이다. 한계가 거의 정확하다. 나머지항의 $\cos\xi$가 1에 가깝기 때문이다.

연습 8.3 문제 35쪽

(a) 참: $n \geq 1$에서 $n^2 + 3n \leq 4n^2$. (b) 참: $m = n^{0.01}$이면 $\log n/n^{0.01} = 100\log m/m \to 0$. (c) 참: $n\sin(1/n) = 1 - \frac{1}{6n^2} + O(n^{-4})$. (d) 참: $n \geq 2$에서 $2^n/n! \leq 2(2/3)^{n-2} \to 0$. (e) 참: $n \geq 3$에서 $\log n \geq 1$. (f) 거짓: $n\log n/n = \log n \to \infty$.

연습 8.4 문제 35쪽

$n\log(1-c/n) = n\big(-\frac{c}{n} - \frac{c^2}{2n^2} + O(n^{-3})\big) = -c - \frac{c^2}{2n} + O(n^{-2})$이다. 지수를 취하고 $e^w = 1+w+O(w^2)$를 쓰면 $(1-c/n)^n = e^{-c}\big(1 - \frac{c^2}{2n} + O(n^{-2})\big)$이다.

연습 8.5 문제 35쪽

따름정리 8.2를 $f(x) = \log(1+x)$, $a = 0$에 쓴다. $n = 1$이면 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\xi)^2} \le x$이다. $n = 2$이면 예제 8.3의 나머지 $\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}$이 $x \ge 0$에서 음이 아니므로 $\log(1+x) \ge x - \frac{x^2}{2}$이다.

연습 8.6 문제 35쪽

$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \log(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1}$이다. $\log(1+\frac{1}{n}) = -\log(1-\frac{1}{n+1}) \ge \frac{1}{n+1}$이므로(로그 $\log(1-y) \le -y$, 보조정리 4.8) γ_n은 감소한다. $\log(1+\frac{1}{k}) \le \frac{1}{k}$를 더하면 $H_n \ge \sum_{k\le n}\big(\log(k+1) - \log k\big) = \log(n+1) > \log n$이므로 $\gamma_n > 0$이다. 아래로 유계이고 감소하므로 수렴한다(정리 5.4). $\gamma_1, \gamma_{10}, \gamma_{100}, \gamma_{10^4}$은 $1,\ 0.6264,\ 0.5822,\ 0.5773$이다.

연습 8.7 문제 36쪽

(a) $\varepsilon > 0$이면 $n \ge N$에서 $P(|Y_n| > M) < \varepsilon/2$이고 $P(|X_n| > 1) < \varepsilon/2$인 M, N이 있다. $|X_n + Y_n| > M+1$이면 $|X_n| > 1$이거나 $|Y_n| > M$이므로 $P(|X_n + Y_n| > M+1) < \varepsilon$이다. (b) 상수 c는 $O_p(1)$이고 $X_n = (X_n - c) + c$이므로 (a)로 $O_p(1)$이다.

연습 8.8 문제 36쪽

$\varepsilon > 0$이면 $P(|X_n| > \varepsilon) \le P(X_n = n) = \frac{1}{n} \to 0$이고, 같은 이유로 $P(\sqrt{n}X_n > \varepsilon) \le \frac{1}{n} \to 0$이다. $EX_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1$, $EX_n^2 = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$이다. 확률수렴은 드물게 일어나는 큰 값을 보지 않지만, 적률은 그 값에 크게 좌우된다.

연습 8.9 문제 36쪽

g가 $[\theta-\delta,\theta+\delta]$에서 두 번 연속미분가능하다고 하고 $K=\max|g''|$로 둔다. $Z_n=\sqrt{n}(T_n-\theta)=O_p(1)$, $E_n=\{|T_n-\theta|\le\delta\}$라 하자.

① E_n에서 Lagrange 나머지항으로 $g(T_n)-g(\theta)=g'(\theta)(T_n-\theta)+\frac{1}{2}g''(\xi_n)(T_n-\theta)^2$이다. 따라서 $R_n=\sqrt{n}(g(T_n)-g(\theta))-g'(\theta)Z_n$은 E_n에서 $|R_n|\le\frac{K}{2}Z_n^2/\sqrt{n}$이다. 따름정리 8.2

② $T_n-\theta=Z_n\cdot n^{-1/2}$이고 $n^{-1/2}\to 0$은 $o_p(1)$이므로 $T_n-\theta=O_p(1)o_p(1)=o_p(1)$, 곧 $P(E_n^c)\to 0$이다. 명제 8.8(c)

③ $Z_n^2/\sqrt{n}=Z_n\cdot(T_n-\theta)=O_p(1)o_p(1)=o_p(1)$이다. 명제 8.8(c)

④ $P(|R_n|>\varepsilon)\le P(E_n^c)+P\big(\frac{K}{2}Z_n^2/\sqrt{n}>\varepsilon\big)\to 0$이므로 $R_n=o_p(1)$이다. Boole